

Maximisation de la probabilité jointe pour un système linéaire à coefficients gaussiens et application à des problèmes de portefeuille

R. Aid¹, M. Minoux², R. Zorgati¹

¹EDF R&D,

²Université P. & M. Curie

Séminaire FIME. IHP, Paris, 04 Novembre 2016

Principaux objectifs de la présentation

- (a) Application de résultats de recherche récents sur la maximisation d'une probabilité au problème d'allocation d'un portefeuille pour la prise en compte d'informations provenant d'experts multiples
- (b) Evaluation des méthodes de résolution et de l'intérêt de ce modèle probabiliste
- (c) Comparaison avec le modèle classique de Markowitz
- (d) Discussion des résultats et perspectives

Sommaire

1. Le problème de portefeuille dans un contexte multi-experts : Formulation probabiliste
2. Maximisation d'une probabilité jointe : quelques résultats théoriques utiles
3. Application au problème du portefeuille
 - 3.1 Résultats sur des exemples générés aléatoirement
 - 3.2 Résultats sur quelques exemples "réels"
4. Conclusions, Perspectives

1. LE PROBLÈME DU PORTEFEUILLE DANS UN CONTEXTE MULTI-EXPERTS : FORMULATION PROBABILISTE

Le problème

- un portefeuille de n actifs, $j = 1, \dots, n$, donnant chacun un rendement aléatoire
- m experts (institutions), $i = 1, \dots, m$, supposés indépendants, fournissent pour chaque actif une estimation de la valeur moyenne μ_{ij} et de la volatilité σ_{ij} du rendement aléatoire u_{ij} .

Problème : Trouver l'allocation optimale x (% d'investissement dans chaque actif j) du portefeuille permettant d'atteindre un rendement-cible r donné ($\sum_{j=1}^n x_j = 1$, $0 \leq x_j \leq 1$).

	RETURN											VOLATILITY										
	Shares DM	Shares EM	Shares US	Credit US HY	Credit US IG	Hedge funds	Index US	Infra structure	Bound EM	Bound US	Private equity	Shares DM	Shares EM	Shares US	Credit US HY	Credit US IG	Hedge funds	Index US	Infra structure	Bound EM	Bound US	Private equity
BNY15	7,00%	9,00%	7,40%	4,80%	3,20%	4,80%	2,50%	7,00%	5,00%	2,10%	9,20%	18,70%	25,20%	16,80%	10,30%	5,50%	6,80%	6,40%	18,40%	11,10%	4,50%	19,70%
HOR15	7,48%	8,68%	7,09%	5,96%	3,69%	5,75%	3,07%	7,09%	5,95%	2,36%	9,47%	19,57%	26,61%	17,12%	11,20%	5,60%	8,34%	6,31%	13,10%	11,66%	2,77%	23,55%
JPM15	6,25%	8,50%	6,50%	6,00%	4,75%	4,00%	4,25%	6,50%	6,25%	4,00%	7,50%	13,25%	21,50%	15,50%	9,25%	6,50%	6,00%	7,25%	16,00%	11,25%	7,75%	22,75%
NTR15	6,10%	7,80%	5,60%	5,60%	3,00%	4,40%	2,50%	6,20%	6,50%	2,50%	8,60%	17,16%	23,01%	15,16%	11,48%	4,90%	7,58%	5,24%	14,67%	13,89%	5,39%	23,58%

Formulation classique de Markowitz

Trouver une allocation optimale x^* du portefeuille qui minimise la volatilité et qui garantisse un rendement-cible moyen donné r :

$$(PM) \left\{ \begin{array}{l} \min_x \sqrt{x^T \Sigma x} \\ \text{s.t. :} \\ \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq r \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ x_j \geq 0 \quad (\forall j = 1, \dots, n). \end{array} \right.$$

Problème défini pour un seul expert.

Σ matrice de covariance de u , $u \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

Formulation Probabiliste

On va d'étudier ici une extension du problème d'allocation du portefeuille permettant de prendre en compte l'information apportée par plusieurs experts ($m > 1$).

Formulation Probabiliste

On propose une nouvelle formulation du problème de l'allocation optimale d'un portefeuille fondée sur un problème d'optimisation stochastique bien défini :

Trouver une allocation optimale x^* du portefeuille qui garantisse un rendement-cible minimal donné r avec une probabilité maximale et qui tienne compte de l'ensemble des avis des m experts:

$$(PP) \left\{ \begin{array}{l} \max_x \mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^n u_{ij} x_j \geq r, i = 1, \dots, m \right\} \\ \text{s.t.:} \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ x_j \geq 0 \quad (\forall j = 1, \dots, n). \end{array} \right.$$

Problème de maximisation d'une probabilité jointe

Formulation Probabiliste

Si les m experts peuvent être considérés comme indépendants, alors il est légitime de supposer que les vecteurs u_i ($i = 1, \dots, m$) sont stochastiquement indépendants et dans ce cas :

$$f(x) = \mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^n u_{ij} x_j \geq r, i = 1, \dots, m \right\} = \prod_{i=1}^m \Phi \left(\frac{b_i - \mu_i^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_i x}} \right)$$

avec $u_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_i)$ et $\Phi = \text{cdf de } \mathcal{N}(0, 1)$

2. MAXIMISATION D'UNE PROBABILITE JOINTE : QUELQUES RÉSULTATS THÉORIQUES UTILES

Cas gaussien indépendant

- Φ : Fonction de répartition de la distribution gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$;
- $u_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_i)$: moyenne $\mu_i \in \mathbb{R}^n$ et variance-covariance $\Sigma_i \succ 0$
- $f_i(x) = \Phi\left(\frac{b_i - \mu_i^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_i x}}\right)$: probabilité de satisfaire l'inégalité $u_i^T x \leq b_i$
- X : polyèdre dans \mathbb{R}^n (si tous les coefficients b_i sont strictement > 0 , X est supposé ne pas contenir 0, sinon 0 est la solution optimale).

Problème : (PMP) $\left\{ \max_{x \in X} f(x) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^n u_{ij} x_j \leq b_i \right\} = \prod_{i=1}^m \Phi \left(\frac{b_i - \mu_i^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_i x}} \right) \right.$

Cas gaussien indépendant

Comme $f(x) > 0$, on considère le :

Problème équivalent : (PMP') $\left\{ \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \ln \left(\Phi \left(\frac{b_i - \mu_i^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_i x}} \right) \right) \right\}$

Difficulté : la non-concavité

La non-concavité rend le problème difficile à résoudre : Exemple : $n = m = 3$,
 $r = 10$

$$\mu = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 11 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 12 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 3.5 & 4 & 1 \\ 0.3 & 0.15 & 1 \\ 0.6 & 1.9 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Non-concavité : 2 solutions initiales différentes avec fmincon donnent 2
solutions optimales différentes :

$$x_0 = [0.2 \quad 0.6 \quad 0.2]^T \rightarrow \text{opt. local } \bar{x} = [0 \quad 1 \quad 0]^T \text{ (Pr jointe 0.0342)}.$$

$$x_0 = [0.1 \quad 0.2 \quad 0.7]^T \rightarrow \text{opt. local } \bar{x}' = [0 \quad 0 \quad 1]^T \text{ (Pr jointe 0.1541)}.$$

Un point-clé dans le développement de méthodes efficaces pour déterminer une
solution optimale globale concerne la concavité de la fonction-objectif.

Caractérisation Générale de Concavité - Cas $m = 1$

Comme la fonction log est concave, croissante en son argument, il suffit de déterminer les conditions pour lesquelles les fonctions $\Phi\left(\frac{b_i - \mu_i^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_i x}}\right)$ sont concaves ou au moins localement concaves.

Posons $\theta = \frac{(b - \mu^T x)^2}{x^T \Sigma x}$. A un facteur multiplicatif près, strictement positif, le hessien de f a pour expression :

$$\bar{H} = \frac{(3 - \theta)}{x^T \Sigma x} \Sigma_{xx}^T \Sigma - \frac{(\theta - 1)}{\sqrt{\theta}} \frac{(\Sigma x \mu^T + \mu x^T \Sigma)}{\sqrt{x^T \Sigma x}} - \mu \mu^T - \Sigma \quad (1)$$

Condition de concavité : ensemble(s) de x satisfaisant $\bar{H}(x) \prec 0$

Caractérisation Générale de Concavité - Cas $m = 1$

Theorem

Pour une contrainte probabiliste de la forme $u^T x \leq b$ avec $u \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ et Σ définie positive : $\Phi\left(\frac{b - \mu^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}\right)$ a un hessien semi-défini négatif en $x \neq 0$, tel que $b - \mu^T x > 0$, si et seulement si :

$$(x^T \Sigma x) (\mu^T \Sigma^{-1} \mu) \leq \theta^2 - 2\theta + 2\sqrt{\theta}(\theta - 1) \frac{\mu^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}} + (\theta + 1) \frac{(\mu^T x)^2}{x^T \Sigma x} \quad (2)$$

(Preuve: dans (MZ 2016), "Convexity of Gaussian Chance Constraints and of Related Probability Maximization Problems", Comput. Stat., **31**-1, (2016)).

Ébauche de la preuve

Nous observons que \tilde{H} est semi-défini négatif si et seulement si $\tilde{H} = \Sigma^{-1/2} \tilde{H} \Sigma^{-1/2}$ l'est. En posant : $V = \Sigma^{1/2} x$, $W = \Sigma^{-1/2} \mu$, $V^T W = \mu^T x$, $\|V\|^2 = x^T \Sigma x$, nous obtenons :

$$\tilde{H} = (3 - \theta) \frac{VV^T}{\|V\|^2} - \frac{(\theta - 1)}{\sqrt{\theta}} \frac{(VW^T + WW^T)}{\|V\|} - WW^T - I. \quad (3)$$

On montre facilement que cette expression est équivalente à $\tilde{H} = YY^T - ZZ^T - I$ où : $Y = \sqrt{1 + \frac{1}{\theta}} \times \frac{V}{\|V\|}$ et $Z = \left(\frac{(\theta-1)}{\sqrt{\theta}} \frac{V}{\|V\|} + W \right)$. Ainsi, \tilde{H} est semi-défini négatif si et seulement si la plus grande valeur propre de la matrice (de rang 2) $YY^T - ZZ^T$ n'est pas plus grande que 1. Un calcul facile montre que ceci est vrai si et seulement si :

$$\|Y\|^2 - \|Z\|^2 + \|Y\|^2 \times \|Z\|^2 - (Z^T Y)^2 \leq 1. \quad (4)$$

et que la condition ci-dessus implique (2).

Cas de m Inégalités Gaussiennes Indépendantes

Dans ce cas, la fonction-objectif à maximiser est :

$$\sum_{i=1}^m \ln \left(\Phi \left(\frac{b_i - \mu_i^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_i x}} \right) \right)$$

Le résultat précédent ne peut pas garantir la concavité de la fonction-objectif sur la totalité de l'ensemble X . Cependant, sous certaines conditions qui vont être précisées, la convexité de l'ensemble $S = \{x : \ln(f(x)) \geq \ln(p)\} \cap X$ peut être obtenue pour une valeur de probabilité suffisamment élevée de p .

Cas de m Inégalités Gaussiennes Indépendantes

Proposition 1 : Soit $p \in]0, 1[$ tel que $\Phi^{-1}(p) \geq 1$ ($\Leftrightarrow p \geq \Phi(1) = 0.8413$).
Pour tout $k = 1, \dots, m$, supposons $S = \{x/f(x) \geq p\} \cap X$ non vide et que l'on
puisse calculer une valeur de borne inférieure γ_k satisfaisant $\frac{\mu_k^T x}{\sqrt{x^T \Sigma_k x}} \geq \gamma_k$ pour
tout $x \in S$.

Soit $\bar{\theta} = (\Phi^{-1}(p))^2$. Alors l'ensemble S est convexe si les deux conditions
suivantes (5) et (6) sont vraies pour tout $k = 1, \dots, m$:

$$\gamma_k \geq 0 \quad (5)$$

$$\mu_k^T \Sigma_k^{-1} \mu_k \leq \bar{\theta}^2 - 2\bar{\theta} + 2\sqrt{\bar{\theta}}(\bar{\theta} - 1)\gamma_k + (\bar{\theta} + 1)\gamma_k^2 \quad (6)$$

De plus, $\ln(f(x))$ est concave sur S .

Certificat d'Optimalité Globale

La Proposition 1 va permettre de déduire un certificat d'optimalité globale lorsque les conditions (5) et (6) sont satisfaites $\forall k = 1, \dots, m$.

Dans les résultats de calcul présentés plus loin, il permet de garantir l'optimalité globale sur un nombre significatif d'instances.

À notre connaissance, on ne trouve pas de résultats similaires dans la littérature existante.

Certificat d'Optimalité Globale

Corollaire 1 : Supposons qu'une solution optimale locale \bar{x} du problème $\max_{x \in X} \{\ln(f(x))\}$ ait été déterminée. Si $\bar{p} = f(\bar{x}) \geq \Phi(1) = 0.8413$ et sous les conditions de la Proposition 1, \bar{x} est une solution optimale globale des problèmes (PMP') et (PMP).

Preuve : Résoudre (PMP') est équivalent à résoudre (PMP'') : $\max_{x \in S} \{\ln(f(x))\}$ où $S = \{x : \ln(f(x)) \geq \ln(f(\bar{x})) = \ln(\bar{p})\} \cap X$. De plus, puisque \bar{x} est un maximum local de (PMP'), il est aussi un maximum local de (PMP''). Sous les conditions de la Proposition 1 (en prenant $p = \bar{p}$), l'ensemble S est convexe et $\ln(f(x))$ est concave sur S . Ainsi (PMP'') est un problème d'optimisation convexe et \bar{x} est nécessairement un optimum global de (PMP''), et donc un optimum global de (PMP') et de (PMP). □

Procédure de Vérification de l'Optimalité Globale

Puisque (PMP') est un problème d'optimisation non-convexe, la solution \bar{x} produite est a priori seulement une solution localement optimale. La proposition 1 et son corollaire servent à vérifier si cette solution est un optimum global en calculant les bornes inférieures γ_k for $k = 1 \dots m$. Pour cela, il faut résoudre pour chaque k , le problème d'optimisation convexe suivant :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \eta_k^* = \min \mu_k^T x \\ \text{s.t. :} \\ \mu_i^T x + \sqrt{\bar{\theta}} \sqrt{x^T \Sigma_i x} \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x \in X. \end{array} \right.$$

puis calculer $\gamma_k = \eta_k^* \sqrt{\bar{\theta}} / (b_k - \eta_k^*)$. Le problème (I) est un SOCP (Second Order Cone Program), efficacement résolu avec une technique de points-intérieurs (CVX dans l'environnement MATLAB).

3. APPLICATION AU PROBLÈME DU PORTEFEUILLE

Le problème de portefeuille transformé en (PMP)

Le problème du portefeuille est un cas particulier du problème (PMP) dans lequel :

- $\Sigma_i = \text{diag}(\sigma_{i1}^2, \dots, \sigma_{in}^2)$: les composantes u_{ij} de chaque ligne u_i du système d'inégalités aléatoires sont stochastiquement indépendantes.
- le polyèdre X est le simplexe n -dimensionnel (dans ce cas $0 \notin X$)

Le problème du portefeuille probabiliste a des inégalités de la forme " \geq " alors que (PMP) a des inégalités de la forme " \leq ". En utilisant le fait que $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ pour toute solution réalisable, chaque contrainte de la forme $\sum_{j=1}^n u_{ij} x_j \geq r_i$ peut être transformée en la contrainte équivalente $\sum_{j=1}^n (\rho_i - u_{ij}) x_j \leq \rho_i - r_i$ pour tout $\rho_i \in \mathbb{R}$. De plus, ρ_i peut être choisi > 0 et suffisamment grand de sorte que chaque coefficient est une variable gaussienne avec une moyenne non-négative $\mu_{ij} = \rho_i - u_{ij}$ (les volatilités σ_{ij} sont inchangées); Dans nos expériences, nous avons choisi : $\rho_i = \max_{j=1, \dots, n} \{\mu_{ij}\}$.

3.1 RÉSULTATS SUR DES EXEMPLES GÉNÉRÉS ALÉATOIREMENT

Generation des instances

Les instances considérées dans nos expériences numériques ont été générées ainsi.

- μ_{ij} valeurs moyennes dans $[\mu_{\min} = 5, \mu_{\max} = 15]$ (rendements moyens entre 5% et 15%);
- σ_{ij} écarts-type dans $[\sigma_{\min} = 2, \sigma_{\max} = 5 \text{ to } 10]$ (volatilités entre 2% et 5-10%);
- Les valeurs les plus élevés de σ_{ij} correspondent aux valeurs les plus élevés de μ_{ij} , et les valeurs les plus faibles de σ_{ij} correspondent aux valeurs les plus faibles de μ_{ij} (les actifs ayant les plus forts rendements sont généralement les plus risquées)
- La valeur de rendement-cible r est choisie proche de $r_{\min} = \min_i \min_j \{\mu_{ij}\}$.
Cela peut s'interpréter comme le rendement-cible du portefeuille qui peut être atteint avec une probabilité maximale.

Résultats numériques

- x_0 : solution initiale utilisée pour lancer fmincon calculé ainsi
 $x_0 = v / \left(\sum_{j=1}^n v_j \right)$, où le vecteur v est choisi aléatoirement à partir de la distribution uniforme dans $[0, 1]^n$.
- r_{min} : rendement moyen minimal et $r = \rho * r_{min}$: rendement-cible.
- P_0 : valeur de la fonction de probabilité jointe pour x_0 (colonne 6)
- \bar{P} : valeur de la fonction de probabilité jointe pour la solution produite par fmincon \bar{x} (colonne 7)
- Vérification de l'optimalité globale :

$$G = \min_{k=1, \dots, m} \left\{ \mu_k^T \Sigma_k^{-1} \mu_k - \left(\bar{\theta}^2 - 2\bar{\theta} + 2\sqrt{\bar{\theta}}(\bar{\theta} - 1)\gamma_k + (\bar{\theta} + 1)\gamma_k^2 \right) \right\} \geq 0.$$

Puisque le problème : $\max_{x \in X} \{ \ln(f(x)) \}$ (où X est le simplexe n -dimensionnel) est a priori *non convexe*, la solution \bar{x} produite par le solveur fmincon n'est pas garantie être une solution optimale *globale*; il s'agit seulement d'un maximum *local*.

Résultats numériques : $m = 5, n = 20$ (1/3)

Exp.	σ_{min}	σ_{max}	r_{min}	ρ	P_0	\bar{P}	Optimalité Globale ? (G)
1	2	5	4.18	1	0.999999	0.999999	YES (2037.78)
	2	5	7.12	1.7	0.980717	0.999729	YES (94.19)
	2	5	7.54	1.8	0.965746	0.998816	NO (-8.09)
2	2	7	4.45	1	0.999972	0.999997	YES (584.14)
	2	7	6.28	1.5	0.990487	0.998937	YES (22.41)
	2	7	6.70	1.6	0.973886	0.996626	NO (-40.42)
3	2	9	4.35	1	0.999230	0.999921	YES (321.37)
	2	9	5.44	1.3	0.991809	0.998373	YES (10.79)
	2	9	5.86	1.4	0.989036	0.995415	NO (-44.30)
4	2	11	4.3	1	0.994511	0.999436	YES (136.51)
	2	11	4.60	1.1	0.985983	0.998538	YES (29.55)
	2	11	5.02	1.2	0.981858	0.995839	NO (-33.92)

Résultats numériques : $m = 20, n = 50$ (2/3)

Exp.	σ_{min}	σ_{max}	r_{min}	ρ	P_0	\bar{P}	Optimalité Globale ? (G)
1	2	5	4.65	1	1	1	YES ($+\infty$)
	2	5	7.91	1.7	0.911510	0.999991	YES (175.43)
	2	5	8.84	1.9	0.317833	0.999567	NO (-1.35)
2	2	7	4.67	1	0.999999	0.999999	YES (2979.67
	2	7	7.21	1.55	0.994600	0.999943	YES (86.46)
	2	7	7.44	1.6	0.976564	0.999832	NO (-5.12)
3	2	9	4.69	1	0.999999	0.999999	YES (654.78)
	2	9	6.51	1.4	0.990472	0.999789	YES (20.33)
	2	9	6.98	1.5	0.981397	0.998698	NO (-101.90)
4	2	11	4.63	1	0.999923	0.999996	YES (461.23)
	2	11	6.02	1.3	0.995545	0.999536	YES (4.80)
	2	11	6.51	1.4	0.927700	0.996165	NO (-127.34)

Résultats numériques : $m = 40, n = 100$ (3/3)

Exp.	σ_{min}	σ_{max}	r_{min}	ρ	P_0	\bar{P}	Optimalité Globale ? (G)
1	2	5	4.81	1	1	1	YES ($+\infty$)
	2	5	7.21	1.5	0.999999	0.999999	YES (691.40)
	2	5	8.65	1.7	0.957583	0.999969	NO (-248.24)
2	2	7	4.81	1	1	1	YES ($+\infty$)
	2	7	6.73	1.4	0.999999	0.999999	YES (358.97)
	2	7	8.65	1.8	0.509131	0.999873	NO (-205.61)
3	2	9	4.81	1	0.999999	0.999999	YES (4339.61)
	2	9	7.21	1.5	0.996499	0.999990	YES (116.94)
	2	9	7.69	1.6	0.922291	0.999907	NO (-105.89)
4	2	11	4.81	1	0.999999	0.999999	YES (1484.44)
	2	11	6.73	1.4	0.998323	0.999970	YES (86.03)
	2	11	7.69	1.6	0.945066	0.997714	NO (-257.21)

Commentaires sur les résultat du test d'optimalité globale

- L'optimalité globale de la solution est garantie dans une proportion significative d'instances dès lors que le rendement-cible n'excède pas trop r_{min} , même pour des rendements-cible significativement plus élevés que r_{min} (typiquement 1.3 à 1.7 fois r_{min}).
- Garantir l'optimalité globale tend à devenir de plus en plus difficile au fur et à mesure que le ratio $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$ augmente (c-à-d que le conditionnement de la matrice de variance-covariance augmente).
- Lorsque m et n augmentent, les niveaux de probabilité requis pour garantir l'optimalité globale deviennent proches de 1.
- Lorsque l'optimalité globale est confirmée, les valeurs de la probabilité jointe optimale obtenues sont toujours proches de 1 (au moins 0.99).

Résultats numériques : Temps moyens de calcul

m	n	Temps CPU (s) pour résoudre (PMP')	Temps CPU Total (s) (incluant le test d'optimalité globale)
5	20	0.08	1.25
20	50	0.22	18.22
40	150	0.5	459.5
100	200	2.43	2345.43
150	250	6.19	11019.19

- Les calculs ont été effectués sur un Intel Xeon E3 (3.4 GHz, 16 Gbits RAM).
- L'approche numérique proposée conduit à des temps de calcul faibles pour des instances avec $m \leq 40$, $n \leq 100$. Elle permet aussi de traiter des problèmes de plus grande taille (jusqu'à $m = 150$, $n = 250$) avec des temps de calcul acceptables.
- Le temps requis par fmincon seul représente une très petite fraction du temps total de calcul. Ceci est consistant avec le fait que garantir l'optimalité globale de problèmes non convexes est une tâche non triviale.

3.2 RÉSULTATS SUR QUELQUES EXEMPLES RÉELS

Experts (Institutions financières)

SSG14	State Street
JPM15	JP Morgan
BNY15	Bank of New York Mellon
PCA15	Pension Consulting Alliance
NEP15	NEPC LLC
AON15	Aon Hewitt
HOR15	Horizon Survey
SSG16	State Street
JPM16	JP Morgan
BNY16	Bank of New York Mellon
NTR15	Northern Trust
MST16	Morgan Stanley
PCA16	Pension Consulting Alliance
RBC16	RBC WM
NEP16	NEPC LLC

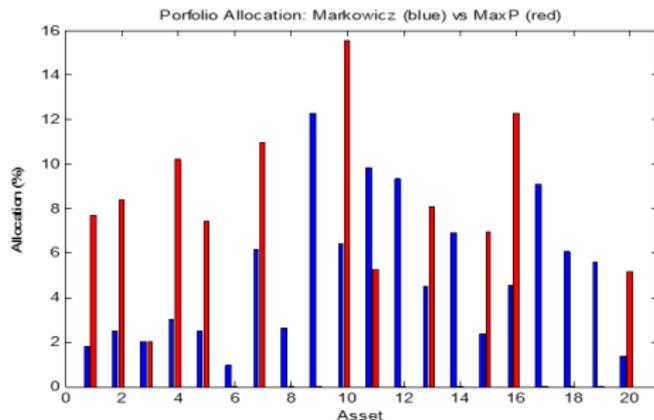
Actifs

Actions EM	Marchés émergents
Actions US/UK/JP/EU	Américaines/Britanniques/Japonaises/Européennes
Credit US/EU HY	High Yield
Credit US/EU IG	Investment Grade (moins risqué)
Hedge Funds	Fonds de pension
Index US	Obligations indexées sur l'inflation
Oblig. EM/US/UK/EU	Obligations nominales (taux réels) (Marchés émergents/Américaines Britanniques/Européennes)
Commodities	Matières premières
Immo Direct	Immobilier
Infrastructure	Grands investissements (rail, réseau, ...)
Private Equity	Actions privées de sociétés non cotés en bourse (risqués)

Portefeuille "P1" ($m = 1, n = 20$)

Rendement-cible : $r = 4.5\%$

Data 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	Actions EM	Actions EU	Actions JP	Actions UK	Actions US	Commo	Credit EM	Credit EU HY	Credit EU IG	Credit US HY	Credit US IG	Hedge funds	Immo direct	Index US	Infra structure	Oblig EM	Oblig EU	Oblig UK	Oblig US	Private equity	
Rendement	JPM15	8,50%	7,00%	5,00%	7,00%	6,50%	3,25%	5,50%	4,25%	2,50%	6,00%	4,75%	4,00%	5,50%	4,25%	6,50%	6,25%	2,25%	2,75%	4,00%	7,50%
Volatilité	JPM15	21,50%	16,25%	14,75%	14,75%	15,50%	16,25%	9,00%	11,75%	3,75%	9,25%	6,50%	6,00%	10,50%	7,25%	16,00%	11,25%	4,00%	5,75%	7,75%	22,75%
Markowitz		0.0178	0.0250	0.0204	0.0303	0.0252	0.0096	0.0615	0.0262	0.1229	0.0645	0.0986	0.0931	0.0451	0.0689	0.0237	0.0457	0.0911	0.0605	0.0558	0.0138
MaxP		0.0769	0.0841	0.0204	0.1021	0.0740	0	0.1097	0	0	0.1558	0.0526	0	0.0806	0	0.0694	0.1229	0	0	0	0.0515

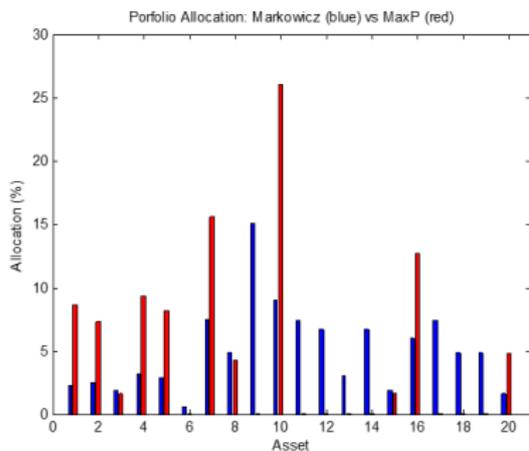


%	return	volatility	Probability
Markowitz	4.50	0.0389	0.5
MaxP	6.37	0.16	0.67

Portfeuille "P2" ($m = 1, n = 20$)

Rendement-cible : $r = 4.5\%$

data2		Actions EM	Actions EU	Actions JP	Actions UK	Actions US	Commo	Credit EM	Credit EU HY	Credit EU IG	Credit US HY	Credit US IG	Hedge funds	Immo direct	Indices US	Infrastructure	OBlig EM	OBlig EU	OBlig UK	OBlig US	Private equity
Rendement	JPM16	0.09	0.07	0.05	0.07	0.07	0.02	0.06	0.05	0.03	0.07	0.04	0.03	0.04	0.03	0.05	0.06	0.02	0.03	0.03	0.07
Volatilité	JPM16	0.21	0.17	0.16	0.15	0.14	0.15	0.09	0.10	0.04	0.09	0.07	0.06	0.11	0.06	0.16	0.10	0.04	0.07	0.07	0.21
Markowitz		0.022	0.0251	0.0189	0.0323	0.0283	0.0053	0.0706	0.0483	0.1562	0.0896	0.0738	0.0668	0.0299	0.0668	0.0189	0.0604	0.0744	0.049	0.049	0.0165
MaxP		0.086	0.0729	0.0565	0.0996	0.0823	0	0.156	0.0421	0	0.26	0	0	0	0	0.0565	0.1264	0	0	0	0.0478

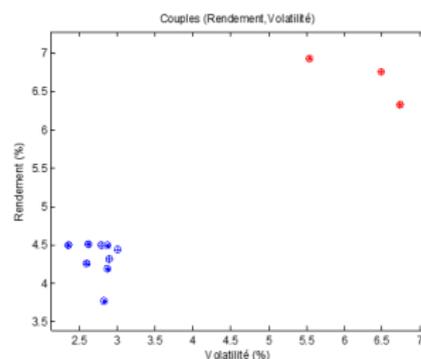
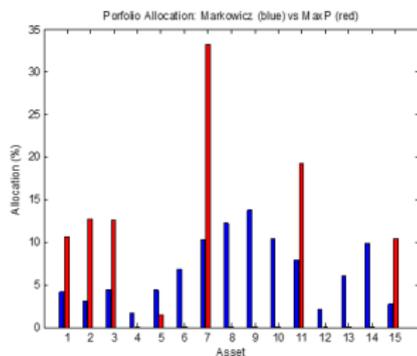


	return	volatility	Probability
Markowicz	0.0450	0.0206	0.5
MaxP	0.06740	0.0434	0.6969

Portefeuille "P3" ($m = 3, n = 15$)

Rendement-cible : $r = 4.5\%$

data3		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		Actions DM	Actions EM	Actions US	Commo	Credit EU HY	Credit EU IG	Credit US HY	Credit US IG	Hedge funds	Index US	Oblig EM	Oblig EU	Oblig UK	Oblig US	Private equity
Rendement	JPM16	5,8%	8,5%	7,0%	1,5%	5,0%	2,8%	6,8%	4,3%	3,3%	2,8%	5,5%	1,8%	2,5%	3,0%	7,0%
	NTR15	6,1%	7,8%	5,6%	5,0%	6,0%	2,0%	5,6%	3,0%	4,4%	2,5%	6,5%	1,8%	2,8%	2,5%	8,6%
	SSG16	6,1%	6,9%	6,0%	5,2%	2,7%	0,9%	7,2%	2,8%	5,6%	3,2%	4,7%	0,2%	1,6%	1,9%	6,7%
Volatilité	JPM16	13,5%	21,0%	15,5%	15,3%	9,5%	3,8%	9,3%	6,5%	6,0%	6,0%	9,5%	4,0%	6,5%	6,5%	20,5%
	NTR15	17,2%	23,0%	15,2%	21,6%	18,4%	5,0%	11,5%	4,9%	7,6%	5,2%	13,9%	7,6%	8,3%	5,4%	23,6%
	SSG16	16,5%	21,5%	16,5%	18,0%	12,5%	5,0%	12,5%	5,5%	7,0%	6,5%	11,0%	5,0%	6,0%	5,0%	25,0%
Markowitz	JPM16	0.0428	0.0319	0.0401	0.0038	0.0651	0.1710	0.1269	0.0943	0.0760	0.0760	0.0839	0.0532	0.0558	0.0558	0.0233
	NTR15	0.0420	0.0339	0.0539	0.0191	0.0375	0.0228	0.1003	0.1385	0.0993	0.1385	0.0767	0.0089	0.0541	0.1385	0.0361
	SSG16	0.0402	0.0287	0.0402	0.0288	0.0285	0.0112	0.0821	0.1336	0.2368	0.0982	0.0772	0	0.0707	0.1018	0.0222
MaxP		0.1055	0.1269	0.1251	0	0.0148	0	0.3317	0	0	0	0.1924	0	0	0	0.1035



Portefeuille "P3" ($m = 3, n = 15$)

Expert	Rend. Marko.	Rend. MaxP	Volatilité Markowitz	Volatilité MaxP	P Markowitz	P MaxP
JPM16	4.50	6.92	2.35	5.53	0.50	0.67
NTR15	4.50	6.75	2.79	6.48	0.50	0.63
SSG16	4.50	6.32	2.86	6.73	0.50	0.60

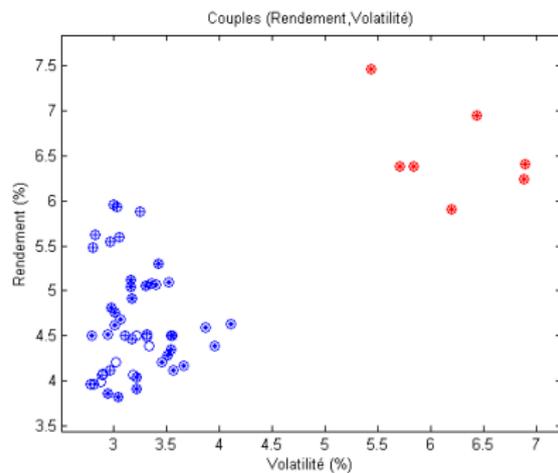
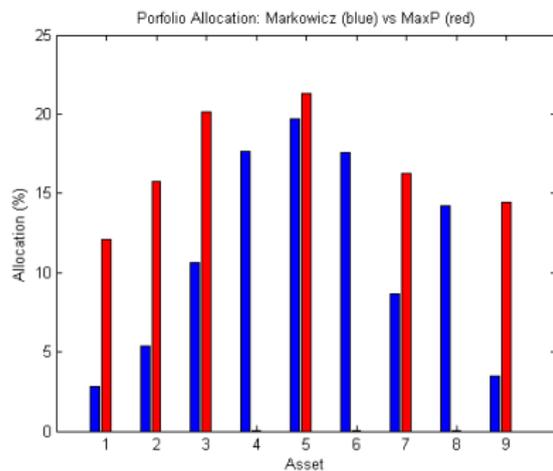
Rendement	JMP16	NTR15	NTR15	Volatilité	JMP16	NTR15	NTR15
JMP16	4.50	4.31	3.76	JMP16	2.35	2.89	2.82
NTR15	4.51	4.50	4.19	NTR15	2.62	2.79	2.86
NTR15	4.26	4.44	4.50	NTR15	2.59	3.00	2.86

P	JMP16	NTR15	NTR15
JMP16	0.50	0.47	0.38
NTR15	0.50	0.50	0.45
NTR15	0.46	0.49	0.50

Portefeuille "P6" ($m = 7, n = 9$)

Rendement-Cible : $r = 4.5\%$

data6		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Actions EM	Actions US	Credit US HY	Credit US IG	Hedge funds	Index US	Oblig EM	Oblig US	Private equity	
Rendement	AON15	8,0%	6,6%	5,9%	3,1%	3,8%	2,8%	5,1%	2,0%	9,0%
	BNY15	9,0%	7,4%	4,8%	3,2%	4,8%	2,5%	5,0%	2,1%	9,2%
	HOR15	8,7%	7,1%	6,0%	3,7%	5,8%	3,1%	6,0%	2,4%	9,5%
	JPM15	8,5%	6,5%	6,0%	4,8%	4,0%	4,3%	6,3%	4,0%	7,5%
	NEP15	9,3%	7,5%	5,8%	4,8%	6,8%	4,0%	6,0%	3,5%	9,5%
	NTR15	7,8%	5,6%	5,6%	3,0%	4,4%	2,5%	6,5%	2,5%	8,6%
	SSG14	7,4%	6,4%	4,9%	2,6%	5,5%	2,8%	4,7%	1,9%	6,8%
	Volatilité	AON15	30,0%	17,0%	12,0%	4,5%	9,0%	4,5%	13,0%	4,4%
BNY15		25,2%	16,8%	10,3%	5,5%	6,8%	6,4%	11,1%	4,5%	19,7%
HOR15		26,6%	17,1%	11,2%	5,6%	8,3%	6,3%	11,7%	2,8%	23,6%
JPM15		21,5%	15,5%	9,3%	6,5%	6,0%	7,3%	11,3%	7,8%	22,8%
JPM16		21,0%	15,5%	9,3%	6,5%	6,0%	6,0%	9,5%	6,5%	20,5%
NEP15		26,0%	17,5%	13,0%	7,5%	9,0%	7,5%	12,0%	5,5%	27,0%
NTR15		23,0%	15,2%	11,5%	4,9%	7,6%	5,2%	13,9%	5,4%	23,6%
SSG14		22,0%	17,0%	12,5%	5,5%	7,0%	6,5%	11,0%	5,0%	25,0%
Markowitz	AON15	0.0925	0.0847	0.1370	0.2174	0.1259	0.2174	0.0885	0.0420	0.0544
	BNY15	0.0949	0.0568	0.1101	0.1558	0.2248	0.1558	0.0910	0.1162	0.0546
	HOR15	0.0246	0.0466	0.0926	0.1859	0.1750	0.1233	0.0778	0.2430	0.0312
	JPM15	0.0183	0.0347	0.1096	0.1811	0.2465	0.1811	0.0733	0.1387	0.0168
	JPM16	0.0178	0.0307	0.0971	0.1605	0.2185	0.2185	0.0786	0.1605	0.0178
	NEP15	0.0328	0.0516	0.0990	0.1344	0.1397	0.1344	0.1350	0.2390	0.0341
	NTR15	0.0366	0.0700	0.1005	0.1984	0.2462	0.1984	0.0620	0.0544	0.0336
	MaxP	0.1210	0.1575	0.2012	0	0.2133	0	0.1626	0	0.1444

Portefeuille "P6" ($m = 7, n = 9$)

Portefeuille "P6" ($m = 7, n = 9$)

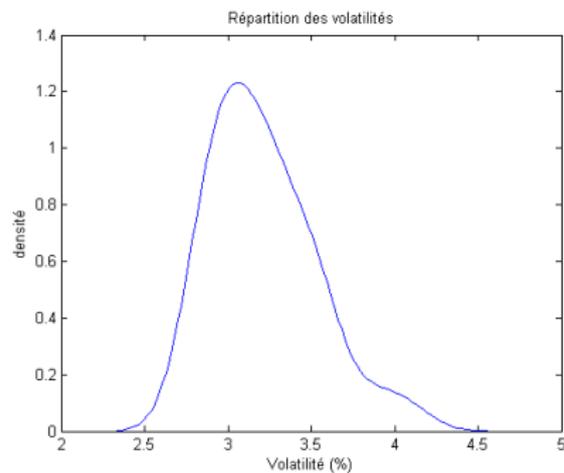
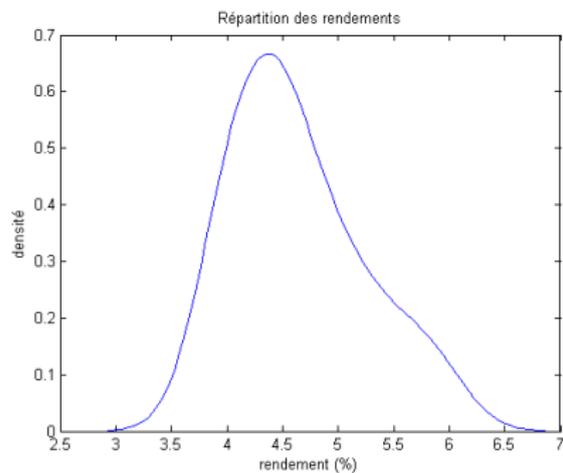
Exp.	Return Markowitz	Return Max \mathbb{P}	Volatility Markowitz	Volatility Max \mathbb{P}	\mathbb{P} Markowitz	\mathbb{P} Max \mathbb{P}
1	4.50	6.24	3.54	6.88	0.50	0.60
2	4.50	6.37	3.10	5.84	0.50	0.62
3	4.50	6.95	2.79	6.44	0.50	0.64
4	4.81	6.38	2.97	5.70	0.54	0.63
5	5.48	7.47	2.80	5.43	0.63	0.70
6	4.50	6.41	3.55	6.89	0.50	0.61
7	4.50	5.90	3.21	6.19	0.50	0.59

Portefeuille "P6" ($m = 7, n = 9$)

Rendement	AON15	BNY15	HOR15	JPM15	NEP15	NTR15	SSG14
AON15	4.50	4.52	5.10	5.30	5.87	4.63	4.38
BNY15	4.35	4.50	5.08	5.12	5.96	4.59	4.48
HOR15	3.86	3.96	4.50	4.91	5.54	4.21	3.98
JPM15	3.91	4.06	4.67	4.80	5.61	4.16	4.21
NEP15	3.82	3.96	4.51	4.76	5.48	4.11	4.08
NTR15	4.04	4.11	4.62	5.05	5.59	4.50	4.07
SSG14	4.28	4.46	5.07	5.05	5.92	4.39	4.50

Volatilité	AON15	BNY15	HOR15	JPM15	NEP15	NTR15	SSG14
AON15	3.55	3.31	3.52	3.42	3.25	4.11	3.33
BNY15	3.54	3.11	3.36	3.17	3.01	3.87	3.31
HOR15	2.95	2.78	2.80	3.18	2.96	3.45	2.87
JPM15	3.21	2.89	3.07	2.98	2.83	3.67	3.02
NEP15	3.05	2.81	2.94	3.01	2.80	3.57	2.90
NTR15	3.22	2.96	3.02	3.31	3.05	3.56	3.18
SSG14	3.52	3.17	3.40	3.16	3.04	3.95	3.21

Portefeuille "P6" ($m = 7, n = 9$)



Portefeuille "Rockafellar & Uryasev" ($m = 1, n = 3$)

Rendement-cible : $r = 0.0110$

$$M = \begin{bmatrix} 0.0101 & 0.0044 & 0.0137 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.0032 & 0.0002 & 0.0042 \\ 0.0002 & 0.0005 & 0.0002 \\ 0.0042 & 0.0002 & 0.0076 \end{bmatrix}$$

Allocation	S&P	Gov Bond	Small Cap	*	Return	σ	\mathbb{P}
Markowitz	0.45	0.11	0.43	*	0.0110	0.0615	0.50
MaxP	0	0	1	*	0.0137	0.0874	0.5123

CVaR	$\beta = 0.9$	$\beta = 0.95$	$\beta = 0.99$
Markowitz	0.0969	0.1159	0.1529
MaxP	0.0983	0.1301	0.1896

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Conclusions, Perspectives

- Un modèle probabiliste d'allocation de portefeuille, fondé sur la maximisation d'une probabilité, est proposé. Ce modèle s'appuie sur des avancées théoriques en optimisation stochastique (nouvelle *condition suffisante* pour la convexité d'ensembles de solutions définis par la probabilité de satisfaire un ensemble d'inégalités aléatoires gaussiennes).
- D'après les premiers résultats, la méthode semble fournir des allocations de portefeuille aux rendements plus élevés avec des volatilités plus fortes que ceux de Markowitz.
- Possibilité de traiter rapidement des instances de taille significative (jusqu'à 250 actifs et 150 experts avec des temps de calcul d'environ 6 secondes).
- Amélioration des tests d'optimalité globale
- Étude de modèles comportant des contraintes probabilistes bilatérales (gamme de rendements).
- Prise en compte de la dépendance entre experts
- Extension des résultats obtenus aux distributions non-gaussiennes

Bibliographie

-  Charnes V., Cooper W., 1959, "Chance-Constrained Programming", Management Science, 6:73-79.
-  Henrion R., 2007, "Structural Properties of Linear Probabilistic Constraints", Optimization, 56, 4:425-440.
-  Henrion R., Strugarek C., 2008, "Convexity of Chance Constraints with Independent Random Variables", Computational Optimization and Applications, 41:263-276.
-  Henrion R., Strugarek C., 2011, "Convexity of Chance Constraints with Dependent Random Variables: the Use of Copulae", Optimization Methods in Finance and Energy, International Series in OR-MS, Vol. 163, Springer: 427-439.
-  Minoux M., Zorgati R., 2016, "Convexity of Gaussian Chance Constraints and of Related Probability Maximization Problems", Computational Statistics, ISSN 0943-4062, Volume 31, number 1, Comput Stat (2016) 31:387-408, DOI 10.1007/s00180-015-0580-z, Springer.