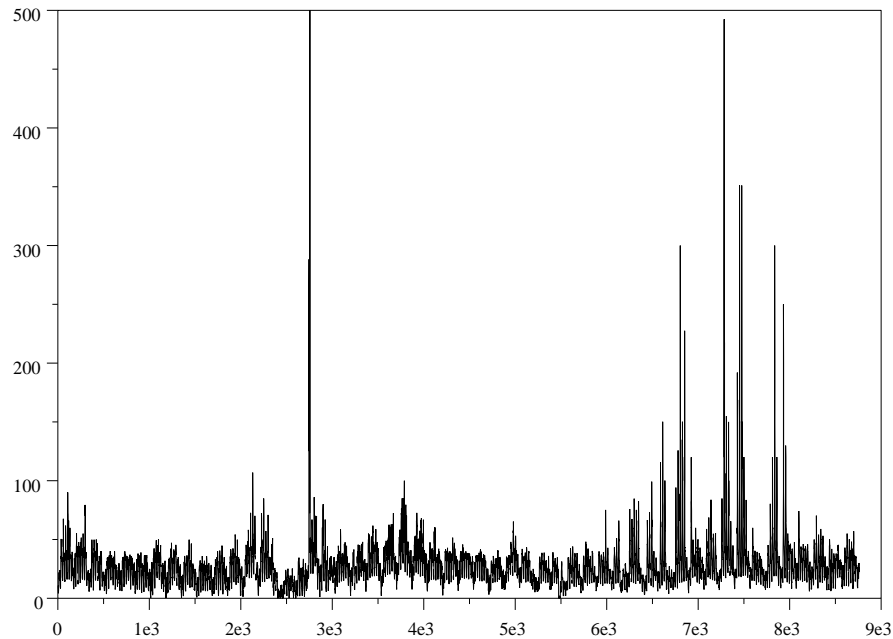


# Quelques modèles de prix de l'électricité pour la valorisation de produits dérivés

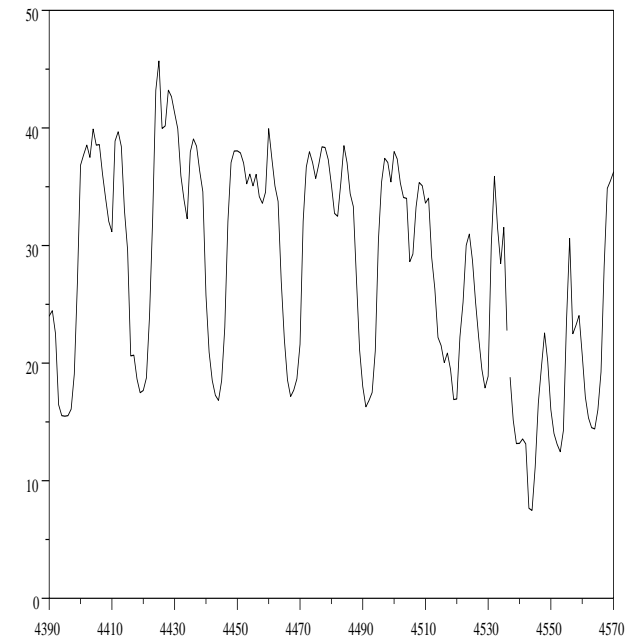
1. Caractéristiques des prix de l'électricité
2. Prétraitement des données de prix à terme
3. Modèle factoriel gaussien
4. Quelques modèles avancés

## Exemple de chronique de prix spot

► Données de prix spot EEX heure par heure  $(S_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^+$



Du 15/09/2002 à 00h00 au 14/09/2003 à 23h00



Zoom sur une semaine

## Caractéristiques du prix spot

- ▶ **Périodicité multi-échelles**
    - Cycle annuel
    - Cycle hebdomadaire
    - Cycle journalier
  - ▶ **Retour à la moyenne**
    - Réponse de l'offre à la demande
  - ▶ **Présence d'importants pics de prix**
    - Caractère non stockable de l'électricité
    - Discontinuité des coûts de production
- ⇒ **Pas de couverture possible sur le spot**

## Exemple de données de prix à terme

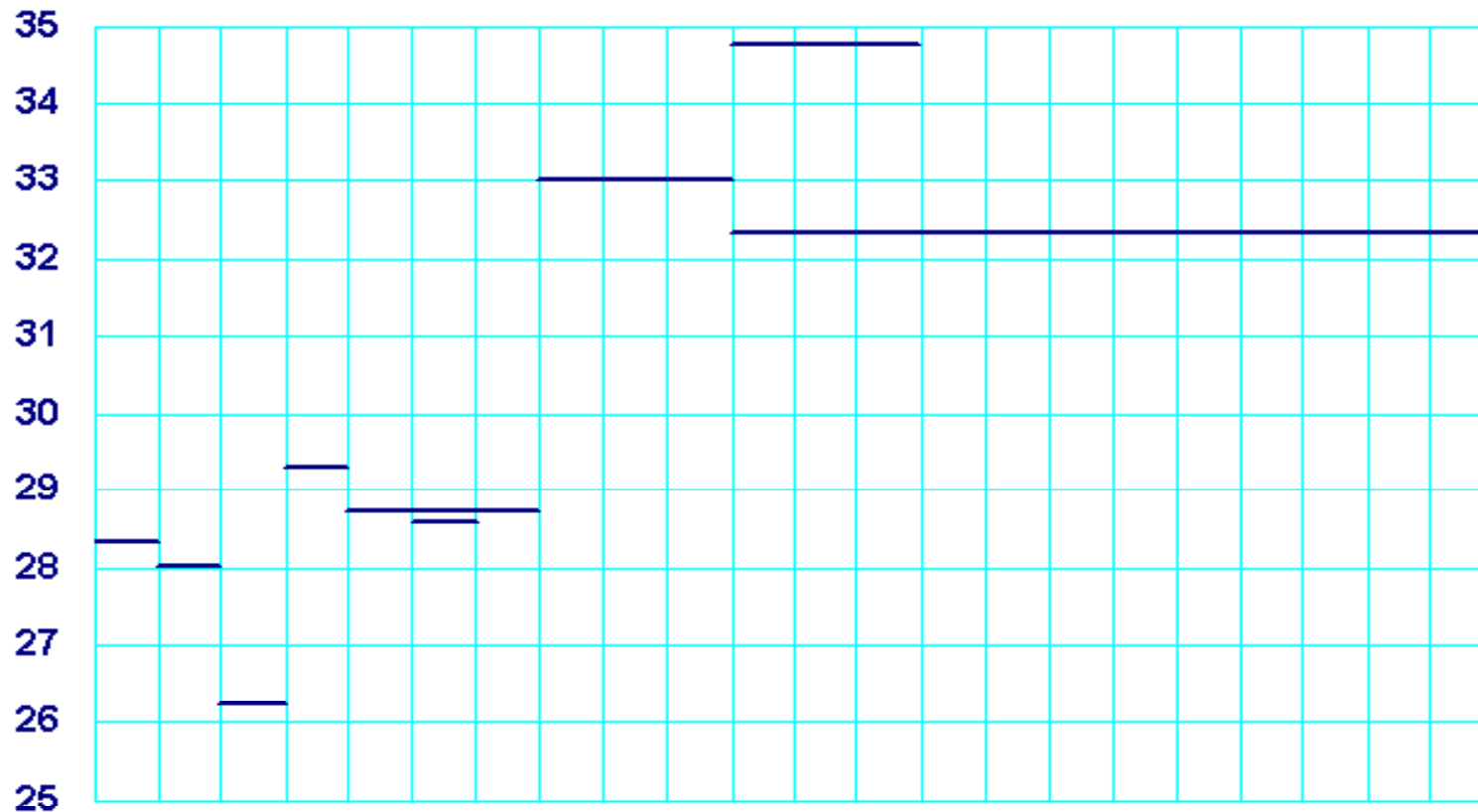
► Données de prix à terme  $F(t, T, \theta)$   $t$  fixé

	Base Bid	Ask	Mid
March	28,25	28,40	28,325
April	27,90	28,15	28,025
May	26,10	26,40	26,25
June	29,20	29,40	29,30
July	28,50	29,00	28,75
August	28,40	28,80	28,60
Q2 2004	27,75	28,00	27,875
Q3 2004	28,50	29,00	28,75
Q4 2004	32,90	33,10	33,00
Q1 2005	34,50	35,00	34,75
Year 2005	32,30	32,40	32,35
Year 2006	33,70	33,90	33,80
Year 2007	34,60	35,10	34,85

Platts Allemand Base (Euros/MWh) le 20 fevrier 2004

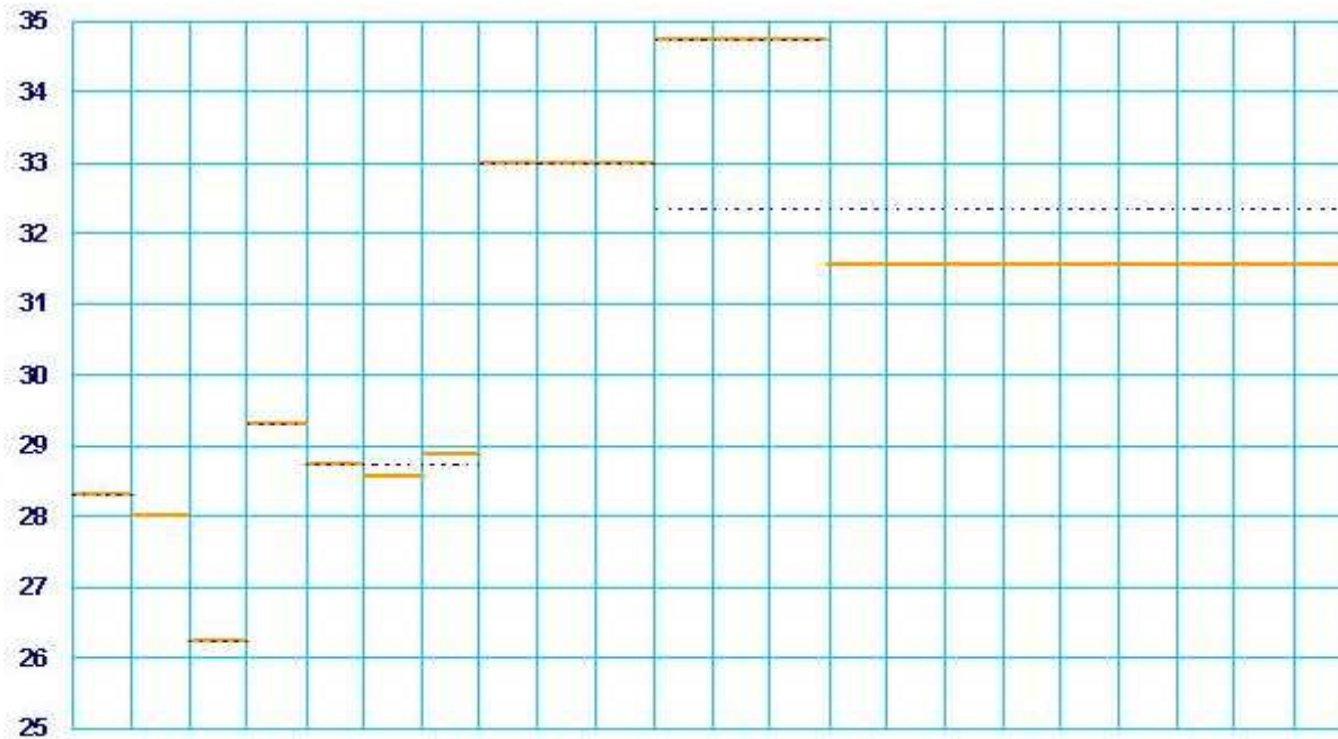
## Courbe de prix à terme

- Représentation des données de prix à terme  $F(t, T, \theta)$  pour  $t$  fixé



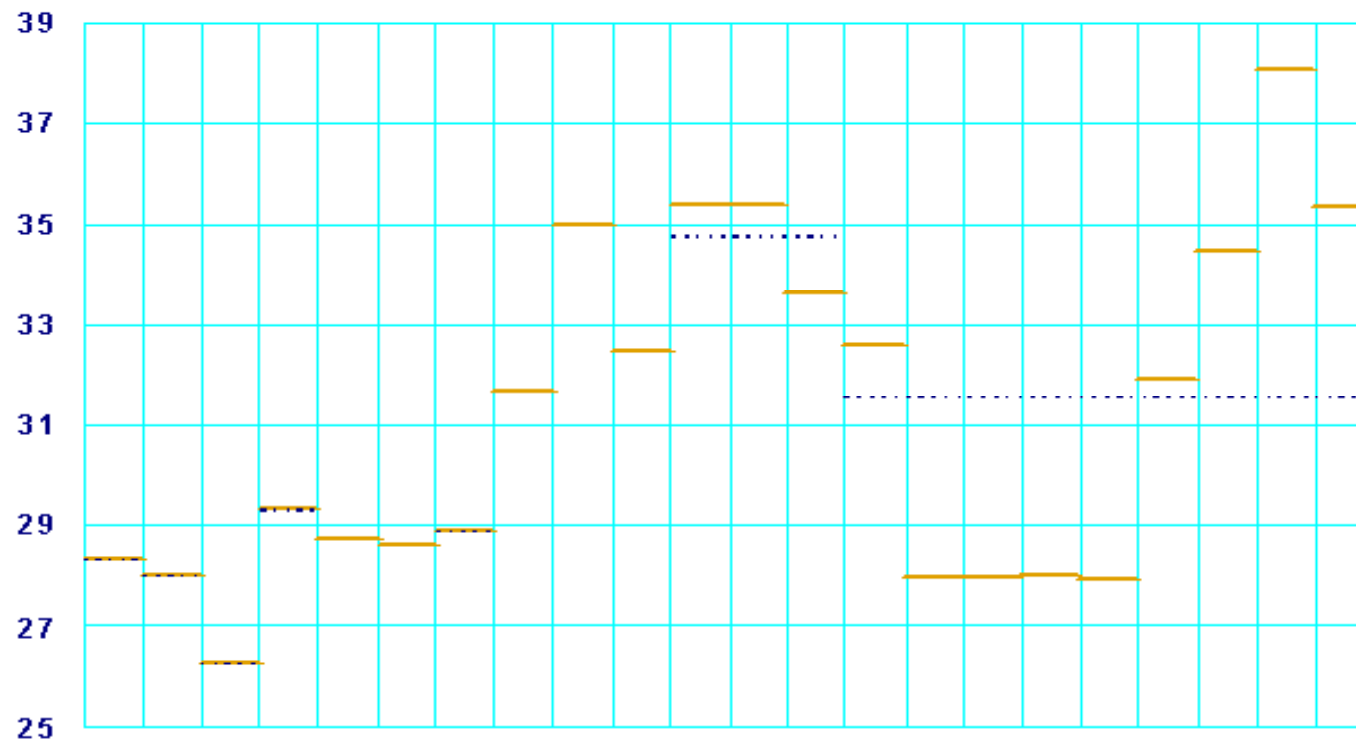
## Gestion des recouvrements

### ► Suppression des recouvrements par Absence d'Opportunité d'Arbitrage



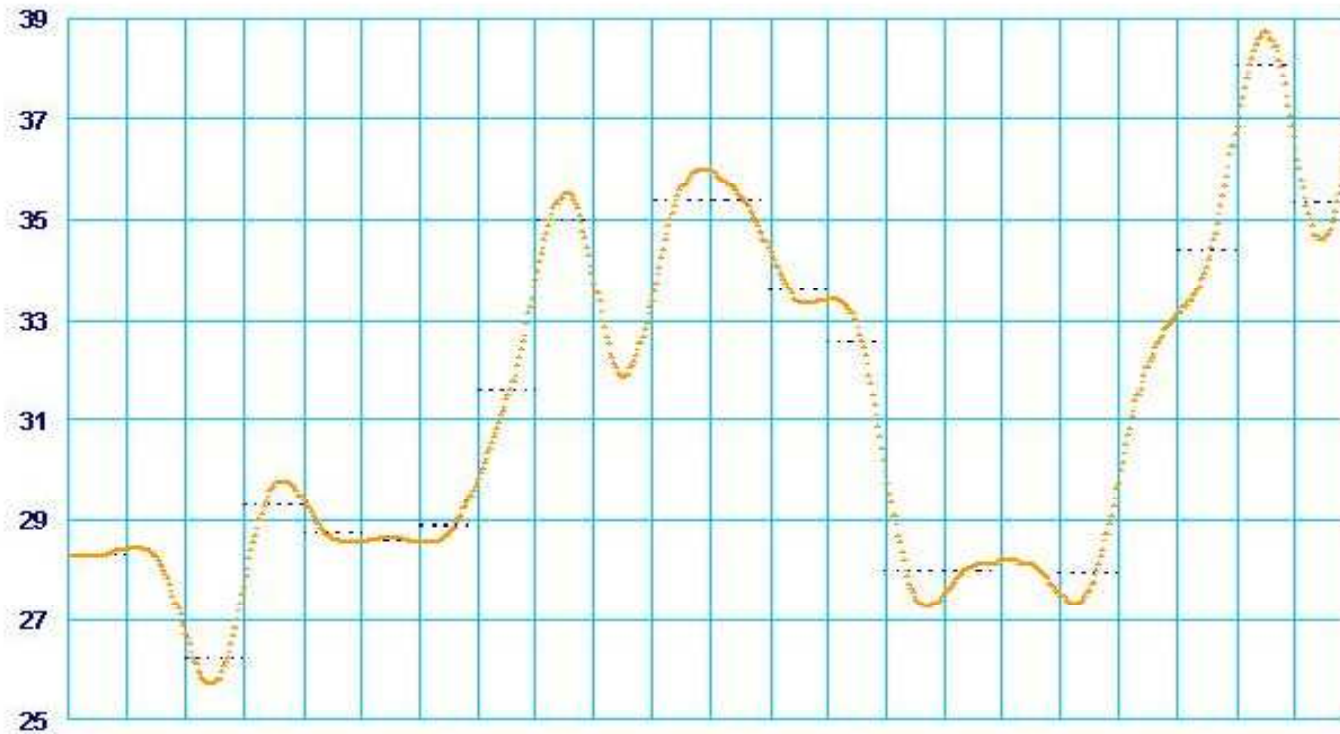
## Saisonnalisation de la courbe des prix à terme

### ► Multiplication des produits par saisonnalisation



## Lissage de la courbe de prix à terme

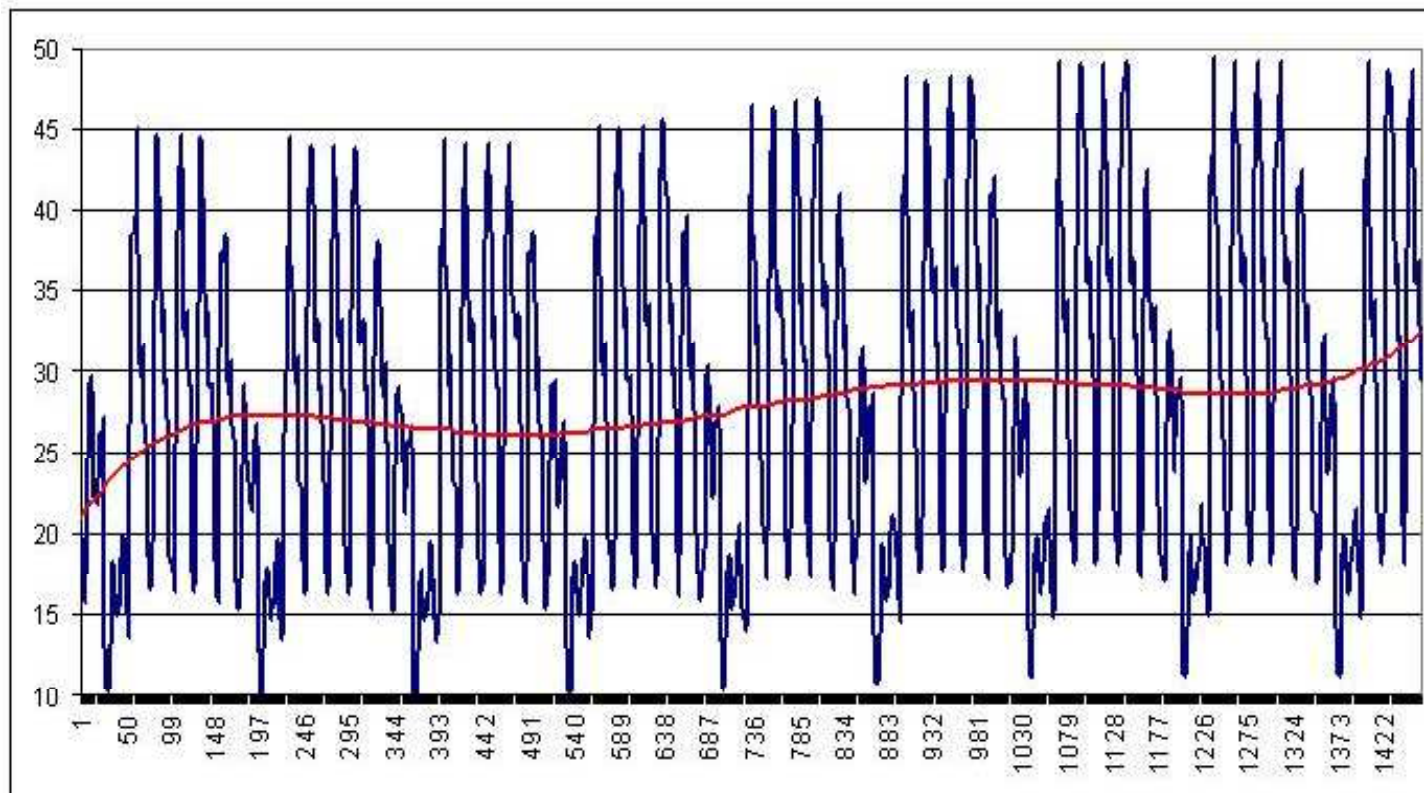
### ► Lissage polynomial





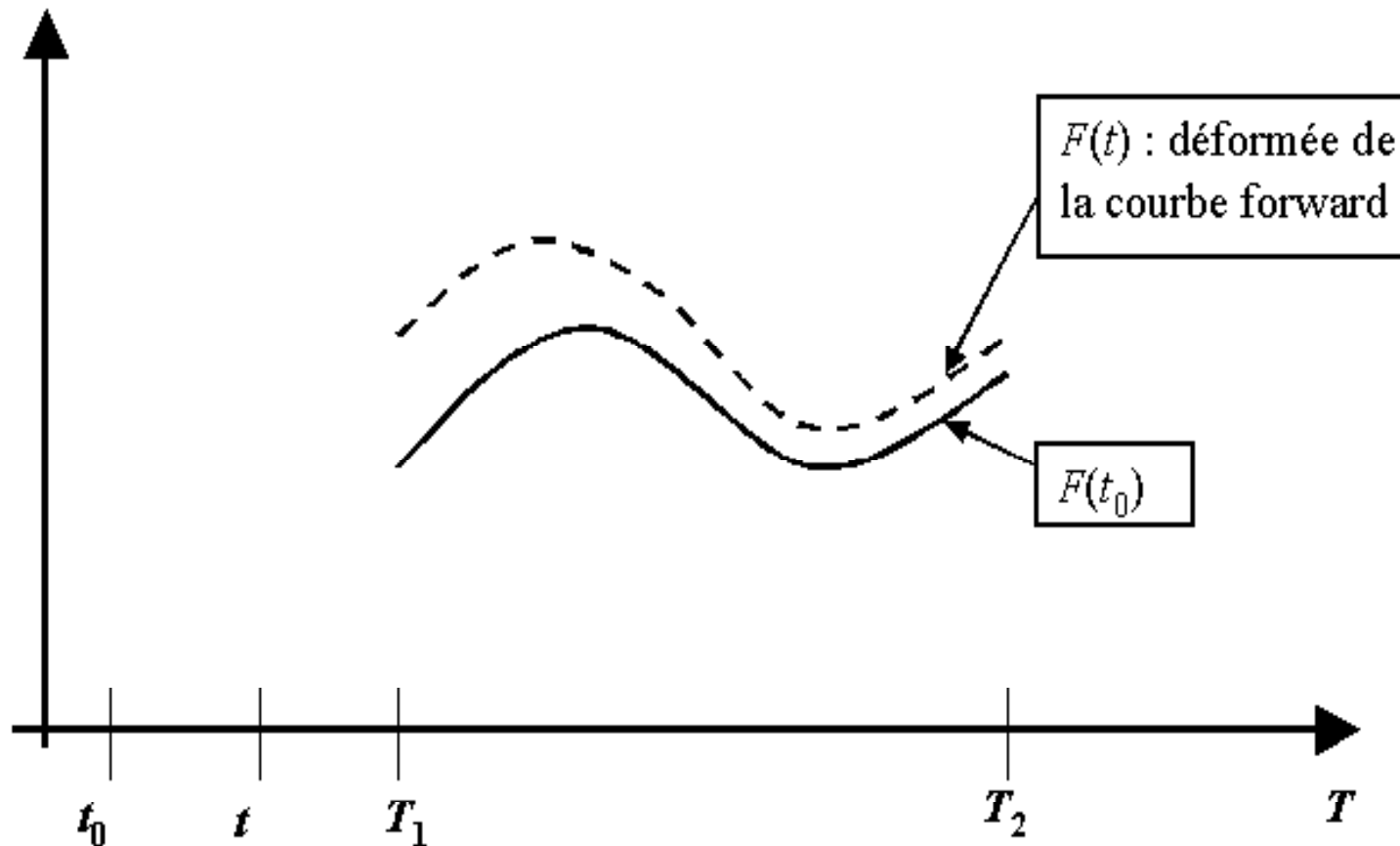
## Courbe de prix à terme reconstruite

### ► Exemple de reconstruction au niveau horaire



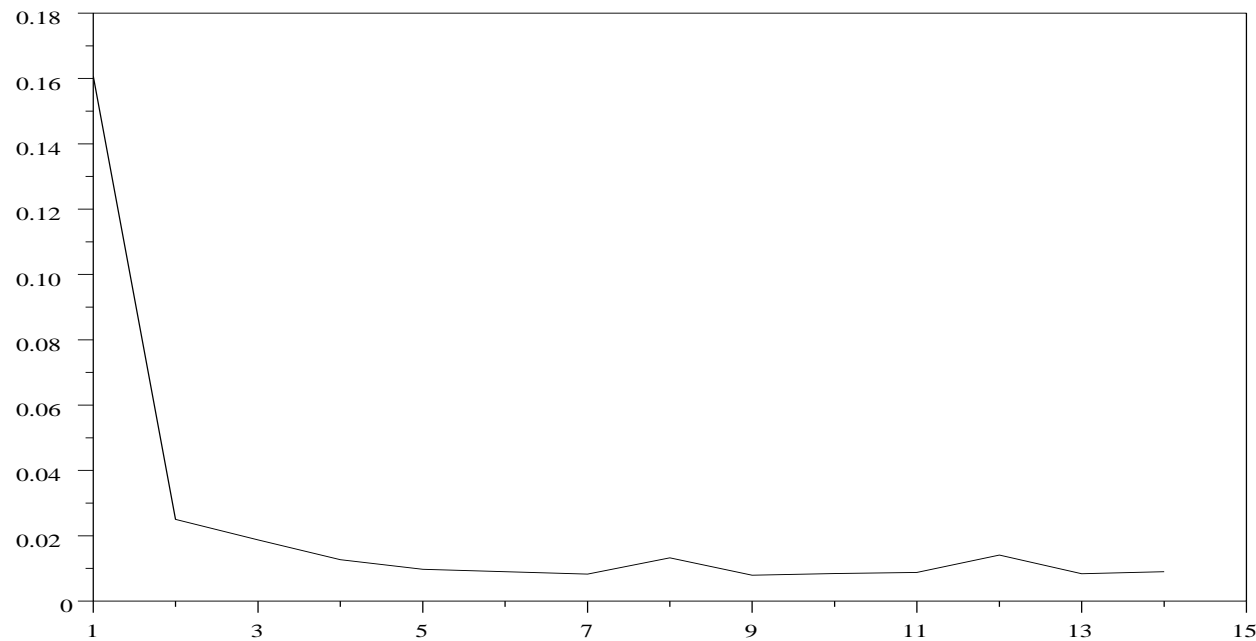
## Evolution de la courbe de prix à terme dans le temps

- Comment évolue la courbe entre les instants  $t_0$  et  $t > t_0$  ?



## Structure de volatilité exponentielle observée

► Volatilité des rendements  $\Delta \log F(t, T, \theta)$  en fonction de l'échéance  $T - t$



Calcul empirique à partir des données Platts du 01/01/2001 au 15/07/2002

## Description du modèle factoriel

- Lien entre prix à terme observés et prix terme horaires

$$F(t, T, \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\theta-1} F(t, T + i)$$

[Heath-Jarrow-Morton-1987], [clewlow-Strickland-2000], [Lucia-Schwartz-2002]

- **Modèle à deux facteur horaire**  $(F(t, T))_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^+$  pour  $T \geq t$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t, T) = F(0, T) \exp\{M(t, T) + e^{-a(T-t)} X_t + Y_t\} \\ X_t = e^{-at} X_0 + \int_0^t \sigma_c e^{-a(t-s)} dW_s^1 \\ Y_t = \sigma_L W_t^2 \end{array} \right.$$

## Modélisation des prix SPOT électriques

► **Modèle de prix spot** : On pose  $S_t = F(t, t)$  ce qui implique

$$S_t = D_t e^{X_t + Y_t} \quad \text{avec} \quad dX_t = -aX_t dt + \sigma_c dW_t^1 \quad \text{et} \quad Y_t = \sigma_L W_t^2$$

- $D_t$  : **saisonnalité de  $S_t$**

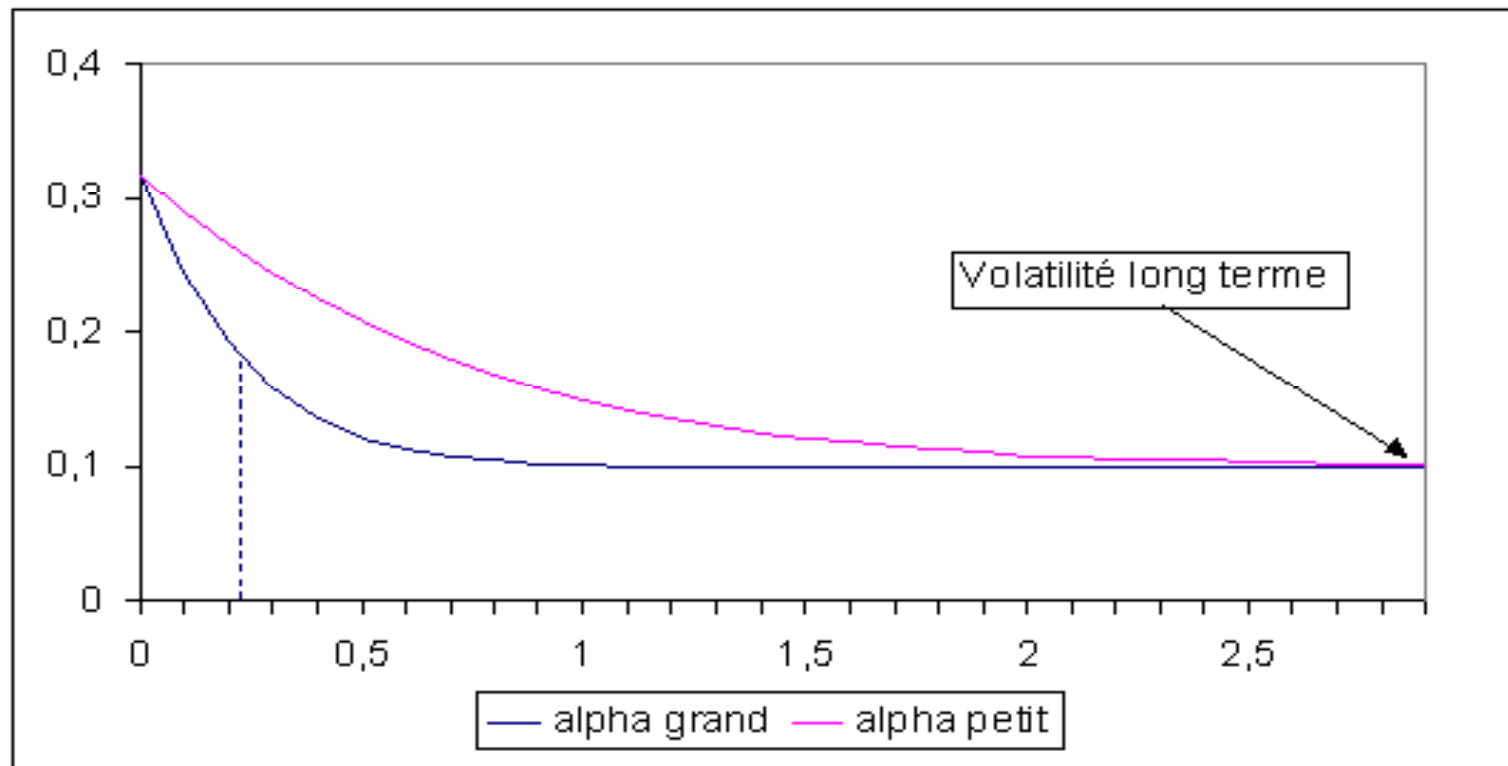
$$D_t = F(0, t) \exp\{M(t, t)\}$$

- $a$  : **vitesse de retour à la moyenne**
- $\sigma_c$  : **volatilité court-terme**
- $\sigma_L$  : **volatilités long-terme**
- $(W^1, W^2)$  : **bruit générateur Brownien**

## Structure de volatilité exponentielle modèle

► Volatilité des rendements  $\Delta \log F(t, T, \theta)$  en fonction de l'échéance

induite par le modèle à deux facteurs  $\sigma(T - t) = \sqrt{\sigma_c^2 e^{-2a(T-t)} + \sigma_L^2}$



## Modèle de diffusion avec sauts

► **Modèle de prix spot : Partie gaussienne + Sauts**

$$S_t = D_t e^{X_t + Y_t} \quad \text{avec} \quad dX_t = -aX_t dt + \sigma_c dW_t^1 + dN_t, \quad Y_t = \sigma_L W_t^2 \quad \text{et}$$

$N_t$  : processus de **Poisson composé**

- **Difficulté pour estimer les paramètres de saut (fréquence et amplitude)**
- **Les sauts sont bien représentés mais les pics de prix sont mal représentés**

## Modèle à volatilité stochastique

► **Extension du modèle [Hobson-Rogers98] dans [Collet-Duwig-Oudjane-2006]**

$$S_t = D_t e^{X_t} \quad \text{avec} \quad dX_t = -aX_t dt + \sigma(P_t) dW_t \quad \text{et} \quad Y_t \sigma_L W_t \quad \text{et}$$

$$P_t = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} (X_t - X_{t-u})^2 du \quad \text{avec} \quad \lambda > 0 \quad \text{et}$$

$$\sigma(P_t) = \sqrt{\omega + \alpha P_t} \quad \text{avec} \quad \omega \geq 0, \alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \omega > 0$$

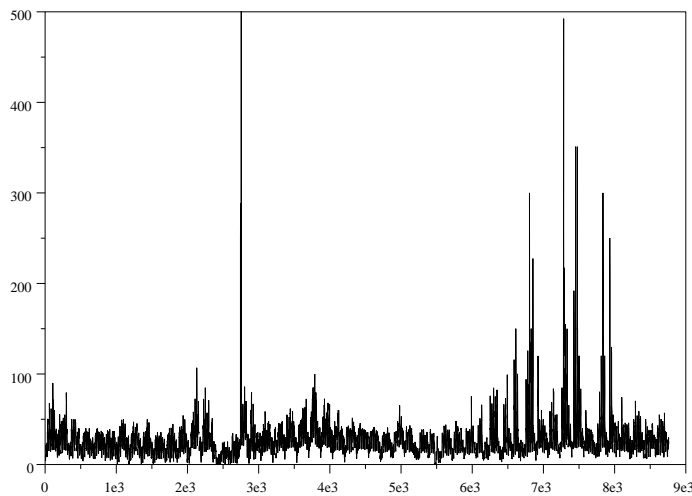
- **Modèle de marché complet [Hobson-Rogers98]. Version temps discret du modèle est proche d'un modèle GARCH (incomplet) [Jeantheau04]**

- **Estimation des paramètres correcte**
- **Représentation des prix médiocre**

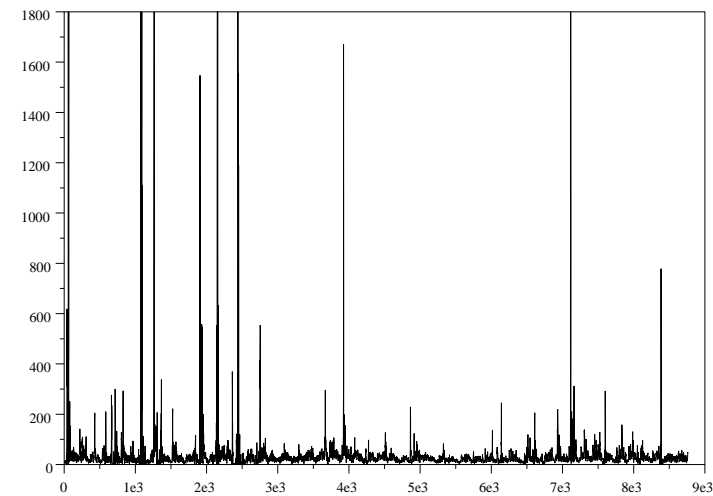


## Simulation de prix spot avec le modèle de type H&R

### ► Comparaison d'une trajectoire simulée avec la chronique observée



Prix spot **EEX**



Prix spot simulé suivant type **H&R**

## Modèle de Barlow

► **Modèle fondé sur la confrontation de l'offre et de la demande [Barlow2002] :**

$u_t(S_t) = d_t(S_t)$  avec  $u_t$  : fonction d'offre et  $d_t$  : fonction de demande



**Confrontation offre / demande (Alberta Power Pool 12/11/99 13h00)**

## Modèle de Barlow

- **La demande est supposée inélastique au prix :**

$$d_t(S_t) = D_t \quad \text{avec} \quad D_t : \text{Demande modélisée par un Ornstein-Uhlenbeck}$$

- **La fonction d'offre est supposée constante :**

$$u_t(x) = g(x) = a_0 + b_0 x^\alpha$$

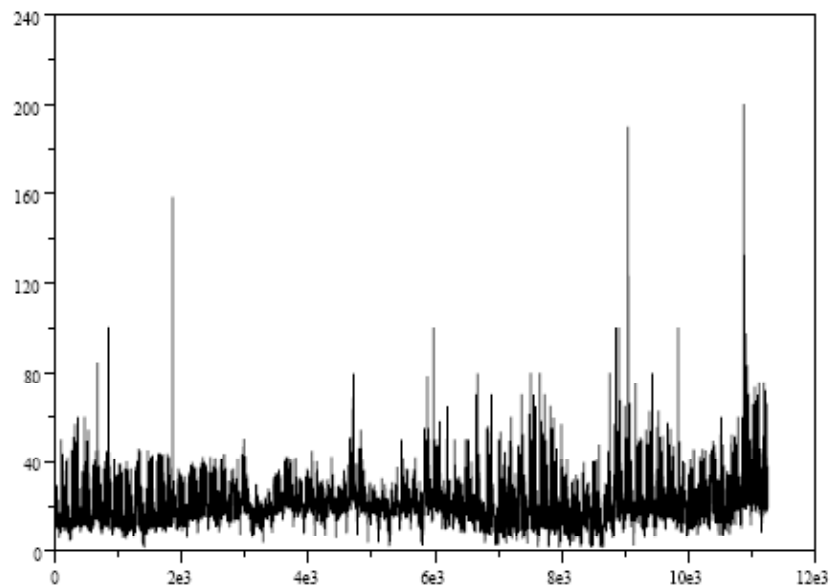
**L'égalité  $D_t = g(S_t)$  + Contrainte de prix maximum  $\varepsilon_0^{1/\alpha}$  implique**

$$S_t = \begin{cases} \left( \frac{a_0 - D_t}{b_0} \right)^{1/\alpha} = (1 + \alpha X_t)^{1/\alpha} & \text{pour } D_t < a_0 - \varepsilon_0 b_0 \\ \varepsilon_0^{1/\alpha} & \text{pour } D_t \geq a_0 - \varepsilon_0 b_0 \end{cases}$$

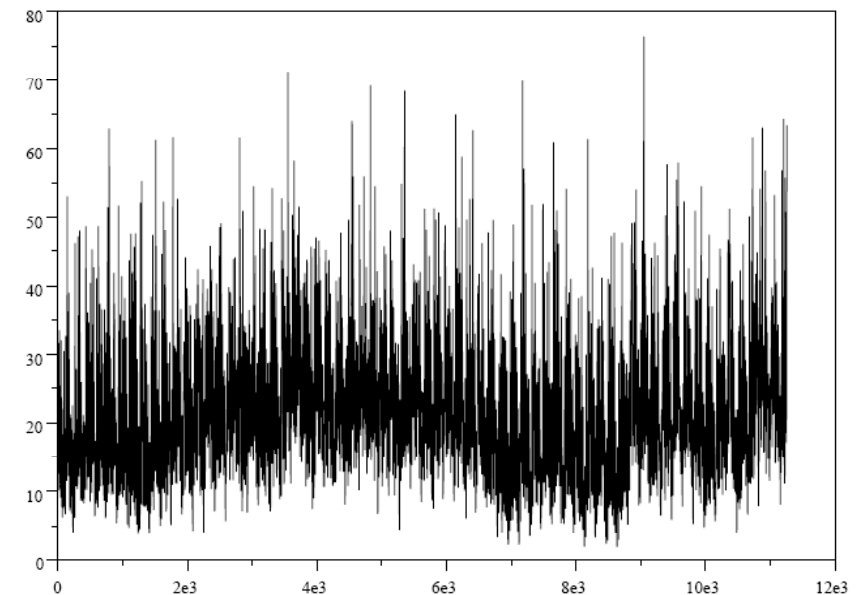
**Avec  $X_t = OU(a, m', \sigma)$  si  $D_t = OU(a, m, \sigma)$**

## Simulation de prix spot avec le modèle de Barlow

### ► Comparaison d'une trajectoire simulée avec la chronique observée



Prix spot **EEX**



Prix spot simulé suivant **Barlow**

## Modèle à 1 facteur Normal inverse Gaussien

[Benth2003], [Oudjane2003]

► **Modèle de prix spot / prix à terme**

$$S_t = F(t, t) \quad \text{et} \quad F(t, T, \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\theta-1} F(t, T + i)$$

► **Modèle à 1 facteur horaire**  $(F(t, T))_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^+$  pour  $T \geq t$

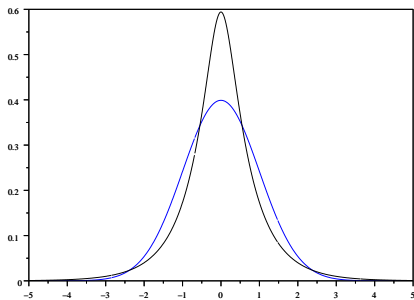
$$\left\{ \begin{array}{l} F(t, T) = F(0, T) \exp\{M(t, T) + e^{-a(T-t)} X_t\} \\ X_t = e^{-at} X_0 + \int_0^t \sigma(s, t) dL_s \quad \text{avec} \quad \sigma(s, t) = \sigma e^{-a(t-s)} \\ L : \quad \text{Processus de Lévy Normal Inverse Gaussien} \end{array} \right.$$

## Processus de Lévy NIG

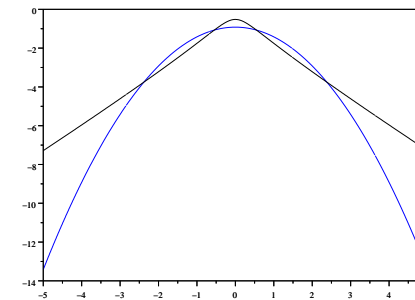
► **Motivation** Représentation des **pics de prix** pour la valorisation d'options très en dehors de la monnaie

► **L Lévy de type Normal Inverse Gaussien (NIG) i.e.**  $L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$

$$L_1 = \mu + \beta Y + \sqrt{Y} N, \quad \text{où } N \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{et } Y \sim \mathbf{IG}(\delta, \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$$



Densité gaussienne vs NIG



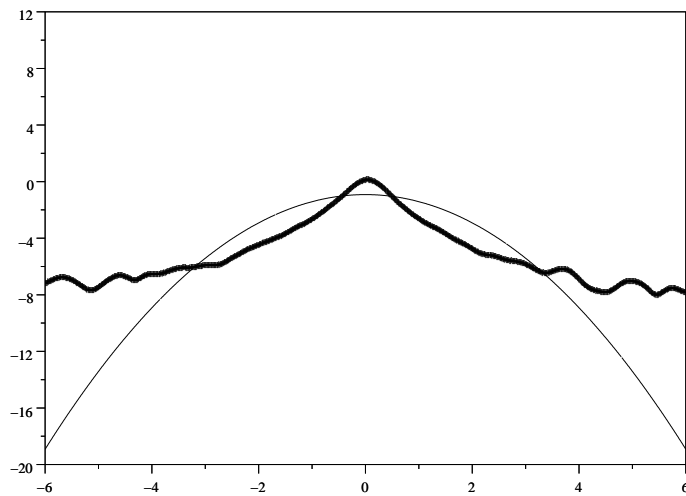
Log-densité gaussienne vs NIG

► **Le logarithme de la transformée de Laplace** a pour expression :

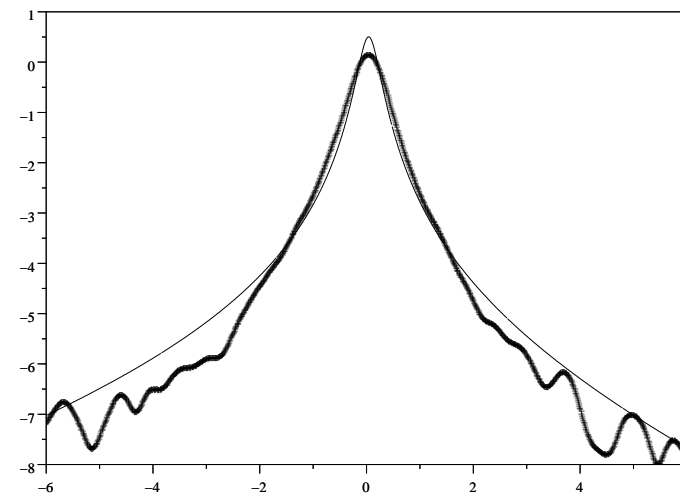
$$\Phi(u) = \log(\mathbb{E}[e^{uL}]) = u\mu + \delta \left( \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right) \quad \forall |\beta + u| < \alpha$$

## Calage des résidus

- Meilleure représentation des queues de distribution par le modèle NIG



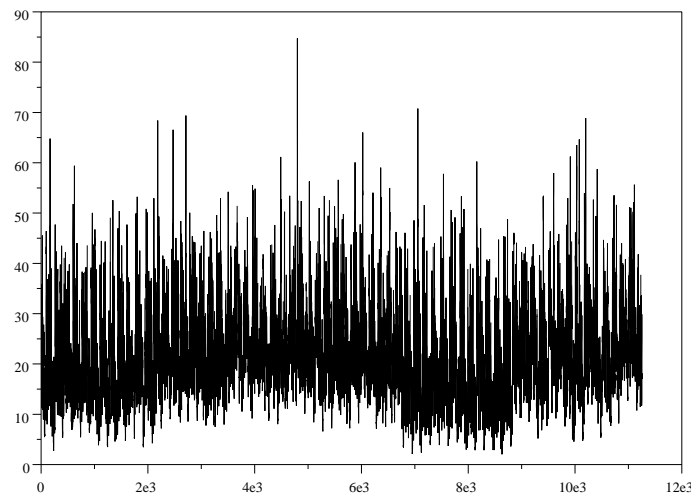
Log-densité **gaussienne**



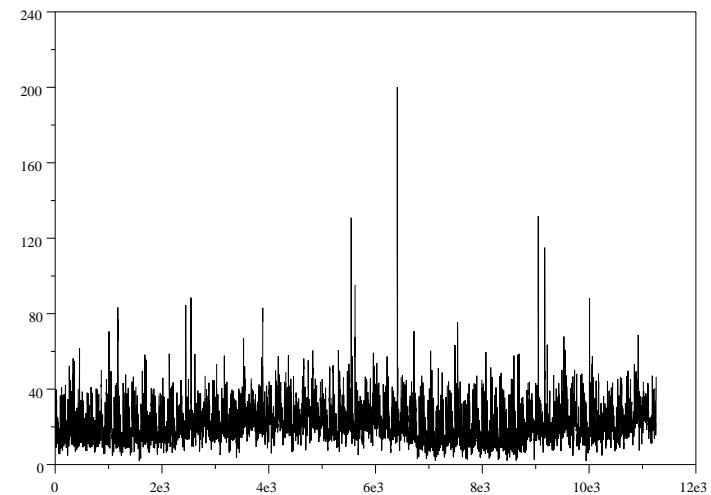
Log-densité **NIG**

## Simulation de prix gaussien vs NIG

- Meilleure représentation des pics de prix par le modèle factoriel NIG



Prix spot simulé avec bruit **gaussien**



Prix spot simulé avec bruit **NIG**



## Valorisation par absence d'opportunité d'arbitrage

- ▶ **Valorisation par absence d'opportunité d'arbitrage :**

**Prime de l'option = moyenne des "cash-flow" sous la probabilité risque neutre**

- ▶ **On montre sous certaines hypothèses (lorsqu'on se limite à une certaine famille de modèle) l'unicité de la probabilité risque neutre pour le modèle NIG ([Oudjane2005])**

- ▶ **Comment caractériser la probabilité risque neutre ?**

## Transformation d'Esscher

►  $L$  un processus de Lévy de type NIG i.e.  $L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$

►  $\theta : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable vérifiant :

$$|\theta(t)| < \alpha \quad \text{et} \quad |\theta(t) + \beta| < \alpha \quad \forall t \in [0, T^*]$$

► On appelle transformation d'Esscher le changement de probabilité de  $P$  à

$\tilde{P}^\theta$  de densité  $Z_t^\theta = \frac{d\tilde{P}_t^\theta}{dP_t}$  de la forme :

$$Z_t^\theta = \exp \left\{ \int_0^t \theta(s) dL_s - \int_0^t \Phi(\theta(s)) ds \right\} \quad \forall t \in [0, T^*]$$

## Condition d'existence d'une probabilité risque neutre

►  $\tilde{P}^\theta \sim P$  sur  $[0, T^*]$  de densité  $Z^\theta$

► Supposons que  $\theta$  vérifie pour tout  $T \in [0, T^*]$  et pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$|\theta(t) + \sigma(t, T) + \beta| < \alpha$$

► Alors les processus  $(F(t, T))_{t \in [0, T]}$  sont des martingales sous  $\tilde{P}^\theta$ , pour toute maturité  $T \in [0, T^*]$ , si et seulement si la condition de dérive suivante est vérifiée :

$$M(t, T) = - \int_0^t [\Phi(\sigma(s, T) + \theta(s)) - \Phi(\theta(s))] ds$$

## Etude sous la nouvelle probabilité

- ▶ Si la fonction  $\theta$  est constante par morceaux sur chaque heure :

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}[ \quad \theta(t) = \theta_n$$

- ▶ Alors le changement de probabilité se traduit sur la mesure de Lévy par une translation du paramètre d'asymétrie :

$$\beta \quad \longrightarrow \quad \beta + \theta_n$$

- ▶ **Conclusion** : sous  $\tilde{P}^\theta$   $L_{t_{n+1}} - L_{t_n} \sim NIG(\alpha, \beta + \theta_n, \delta, \mu)$

## Calage des paramètres du modèle

### ► Calage des paramètres à partir des données de prix spot

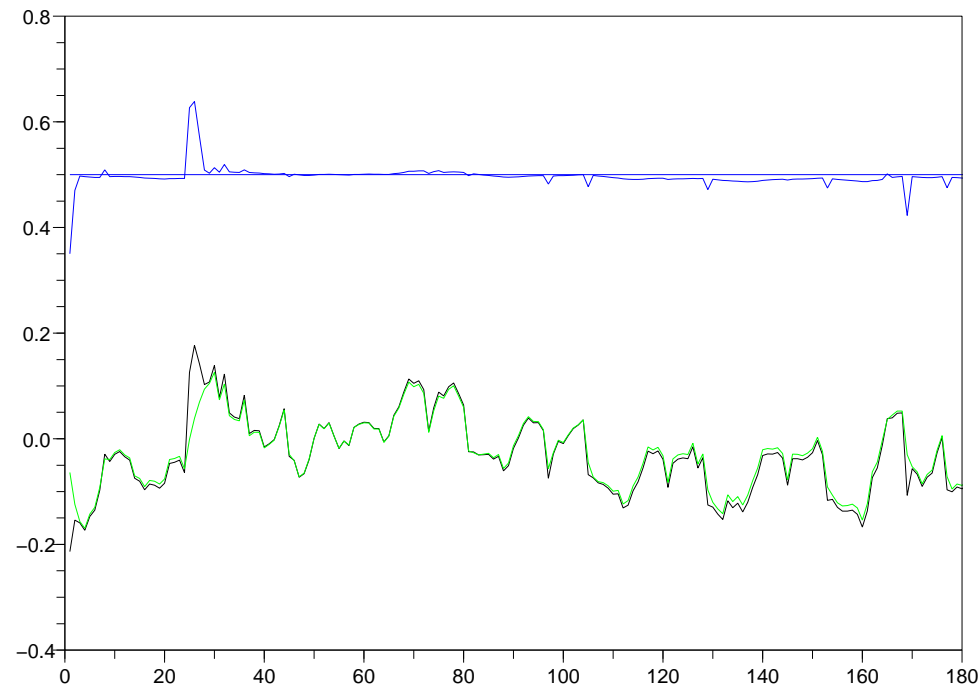
- Les paramètres  $(a, \sigma)$  sont calés par moindres carrés
- Les paramètres  $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  du bruit NIG sont calés par maximum de vraisemblance

### ► Calage de la condition de dérive à partir des données de prix à terme et de la saisonnalité

$$M(T, T) = -\log \left( \frac{F(0, T)}{D_T} \right) = - \int_0^t [\Phi(\sigma(T-s) + \theta(s)) - \Phi(\theta(s))] ds$$

## Calage de la condition de dérive

► Calage de  $\theta$  tel que  $\log \left( \frac{F(0,T)}{D_T} \right) = \int_0^t [\Phi(\sigma(s,T) + \theta(s)) - \Phi(\theta(s))] ds$



## Prix d'options européennes sur spot

► **Comparaison avec le modèle gaussien** pour différents prix d'exercice et maturités

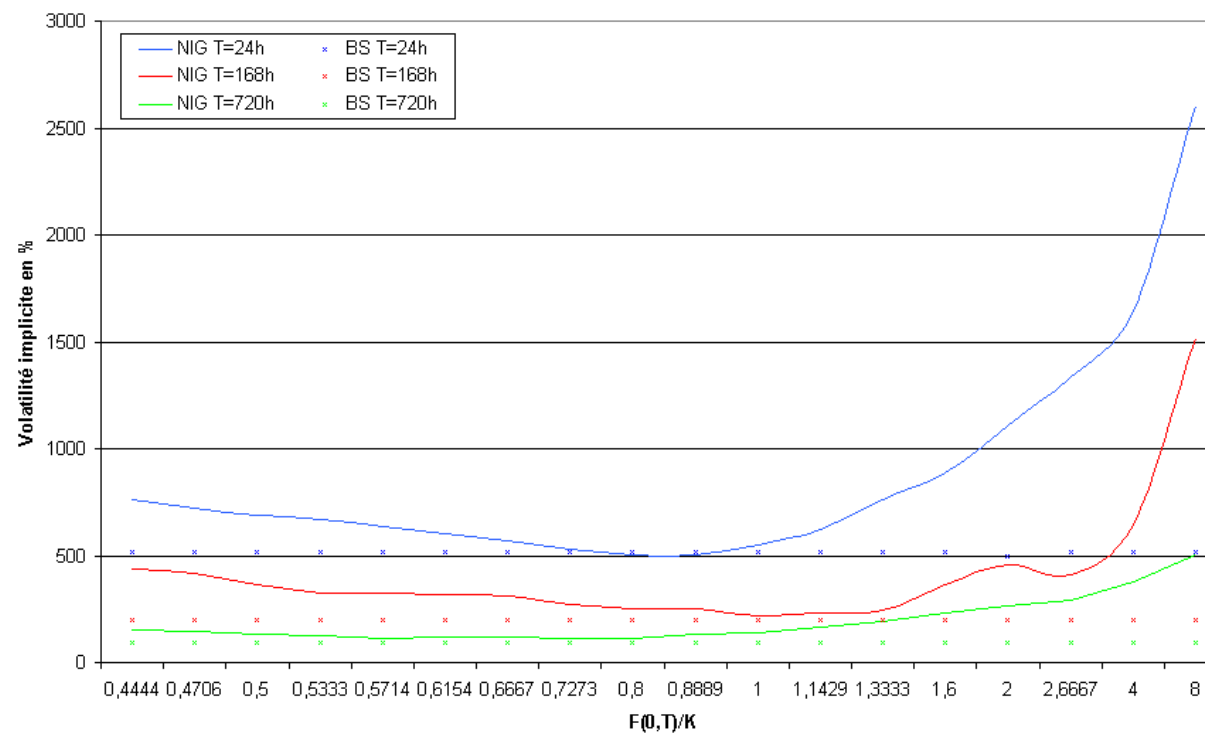
● **Prix à terme de 40 Euros**

		Strike				
		NIG (BS)	75	100	150	180
Maturité	1 Mois	1,08 (0,05)	0,65 (0,00)	0,35 (0,00)	0,26 (0,00)	
	2 Mois	0,68 (0,05)	0,38 (0,00)	0,21 (0,00)	0,12 (0,00)	
	3 Mois	0,12 (0,06)	0,03 (0,00)	0,01 (0,00)	0,01 (0,00)	

# Smile de volatilité

## ► Smile de volatilité pour différentes maturités

Smile de volatilité du call





## Conclusions et perspectives

### ► Conclusions

- Difficulté de **représenter les pics de prix** : pas de modèle universel
- **Incomplétude** du marché : quel paradigme pour la valorisation ?
- Impact de **l'approximation horaire** de la courbe de prix à terme ?

### ► Perspectives autour du modèle NIG

- Comparaison des prix fournis par le modèle NIG à des **prix de référence**
- Test sur des options de type **swing** en dehors de la monnaie
- Recherche d'une **couverture** associée

## Références (1/2)

- **[Heath-Jarrow-Morton-1987]. D. Heath, R. A. Jarrow, A. Morton, Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology, working paper, Cornell University, 1987**
- **[Clewlow-Strickland-2000]. L. Clewlow, C. Strickland, Energy derivatives. Pricing and Risk management, Lacima Publications, 2000**
- **[Lucia-Schwartz-2002]. J. J. Lucia, E. S. Schwartz, Electricity prices and power derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange 2002, Review of Derivatives Research, Vol. 5, pp. 5-50, 2002**
- **[Hobson-Rogers-1998]. D. G. Hobson and L. C. G. Rogers, Complete Models with Stochastic Volatility, Mathematical Finance, pp. 27-48, 1998**
- **[Jeantheau-2004]. T. Jeantheau, A link between complete models with stochastic volatility and ARCH models, Finance and Stochastics, pp. 111-131, 2004**

## Références (2/2)

- **[Collet-Duwig-Oudjane-2006]. J. Collet, V. Duwig, N. Oudjane, Some non-Gaussian models for electricity spot prices, PMAPS 2006**
- **[Barlow-2002]. M. T. Barlow, A Diffusion Model for Electricity Prices, Mathematical Finance, pp. 287-298, 2002**
- **[Benth-2003]. F. E. Benth and J. Saltyte-Benth, The normal inverse gaussian distribution and spot price modelling in energy markets, Centre of Mathematics for Applications Department of Mathematics, 2003**
- **[Oudjane-2003]. N. Oudjane, Modélisation des prix spot électriques par processus hyperbolique, Note interne EDF/R&D, HI-23-02-022, 2003**
- **[Oudjane-2005]. N. Oudjane, Modèle à un facteur Normal Inverse Gaussien et probabilité martingale, Note interne EDF/R&D HR-33-05-013/A, 2005**