



Electricity spot price modeling: first results

Nazim Régnard, EDF R&D, CREST

12 Février 2006

Séminaire du Laboratoire de
Finance des Marchés d'Énergies

SUMMARY

Fundamental of Electricity spot price

Main features of the series

Proposition of a model

1

Electricity market description

Electricity market description

Overview

Electricity demand

Electricity supply

The supply and demand equilibrium

Overview of the market

- the non-stockability of electricity prevents the producer from producing electricity before it will be delivered
- Physic risk [system failure] if electricity production does not equalize electricity demand
- We have worked on the 5 PM hour spot price between the 01/01/2001 and the 11/9/2005 because it exhibits all the features of the electricity demand and supply

Electricity demand

- demand is linked to two main factors : temperature and calendar that drive electricity consumption
 - heating and cooling effects
 - economic activities decreasing during holidays and week-ends
- It induces two main seasonalities on demand : annually and weakly seasonalities

Electricity supply

Different power plants :

- Nuclear plants, Coal plants, Gas plants, Fuel,
- Windmill
- Hydro-power

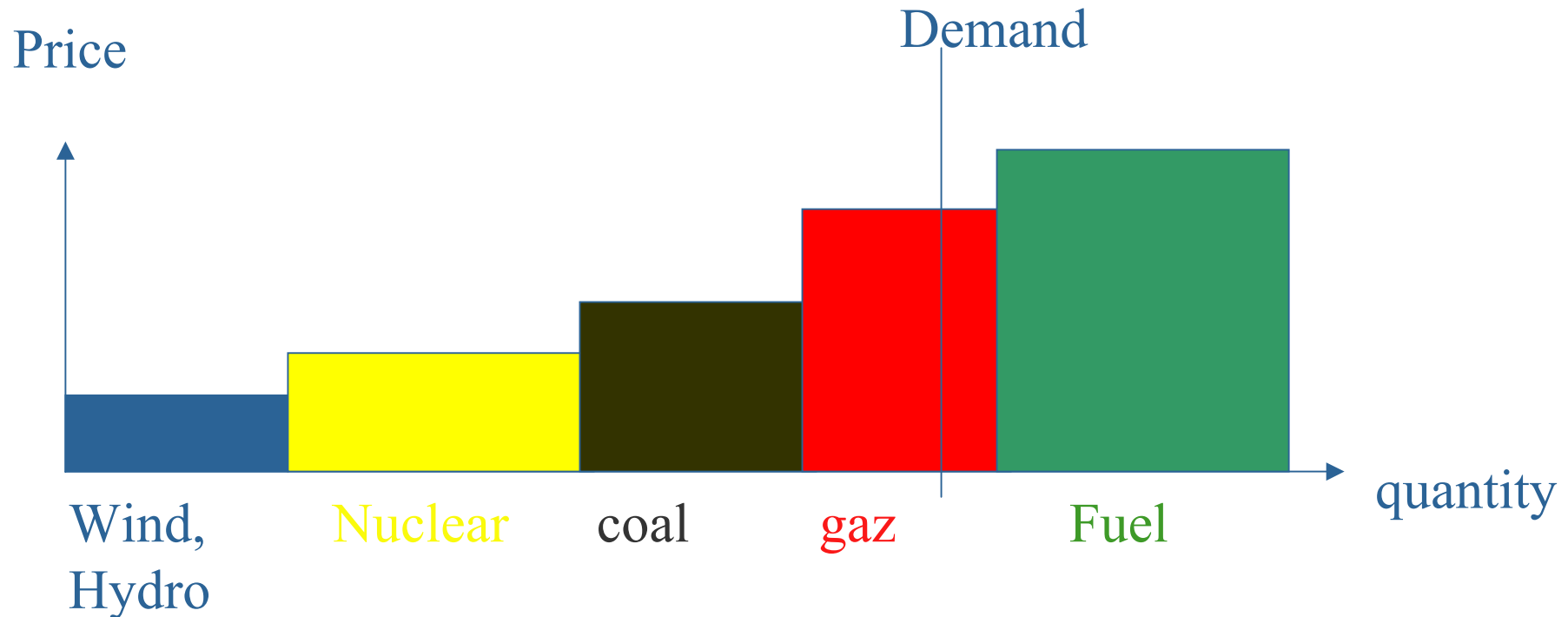
Main factors that influence the electricity supply :

- Combustible costs and combustible availability
- Wind-speed
- Reservoir level and inflow
- Production unit availability is not uniform due to units servicing or physical problems

Seasonalities exist in :

- Production unit servicing
- Speed of wind
- River inflows

Supply and demand equilibrium



Factors influencing both demand and supply influence prices

Price seasonalities come from demand seasonalities and supply seasonalities

2

Main features of the series

Main features of the serie

EEX spot market

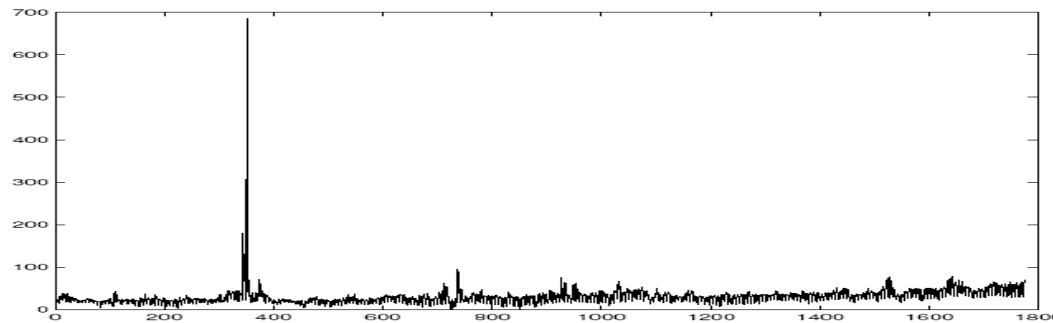
Spot price: 24 daily prices

Focus on prices for delivery at 5 PM (peak hour)

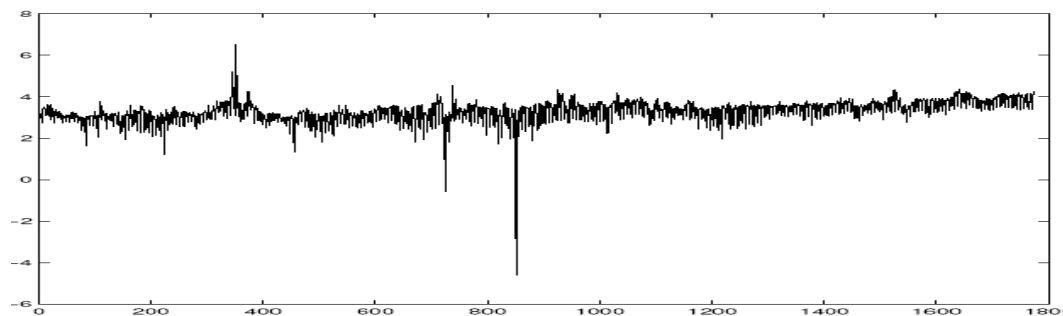
Main features

The 5 PM hour spot price serie

Increasing trend, extreme values, multiplicative scheme



Take the logarithm to symetrize the serie and get a additive scheme

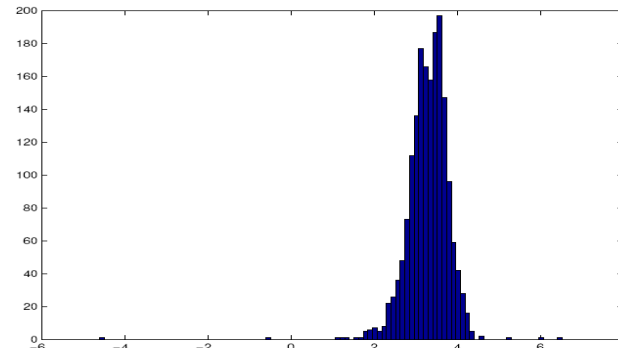
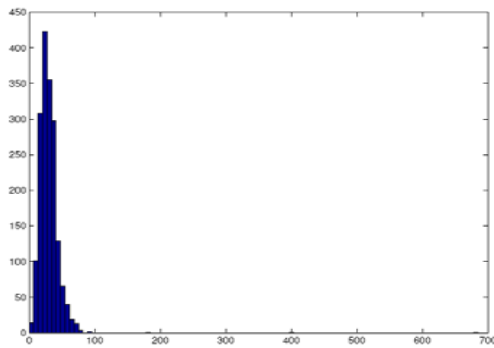


The 5 PM hour spot price

Some statistics : the serie is not normally distributed

moyenne Jarque-Bera(P_{value})	variance Shapiro-Wilks(P_{value})	kurtosis	skewness
3.30 < 0.001	0.25 < 0.001	38.22	-2.60

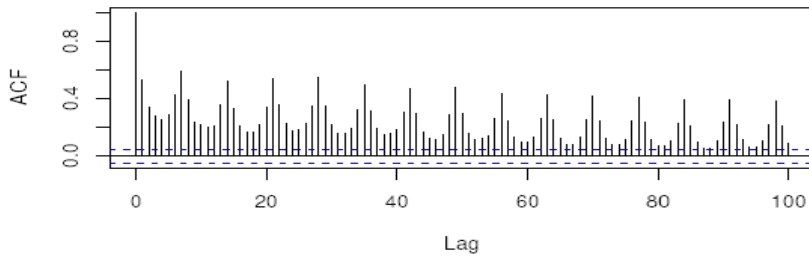
density is skewed (on the left) and possesses fat tail



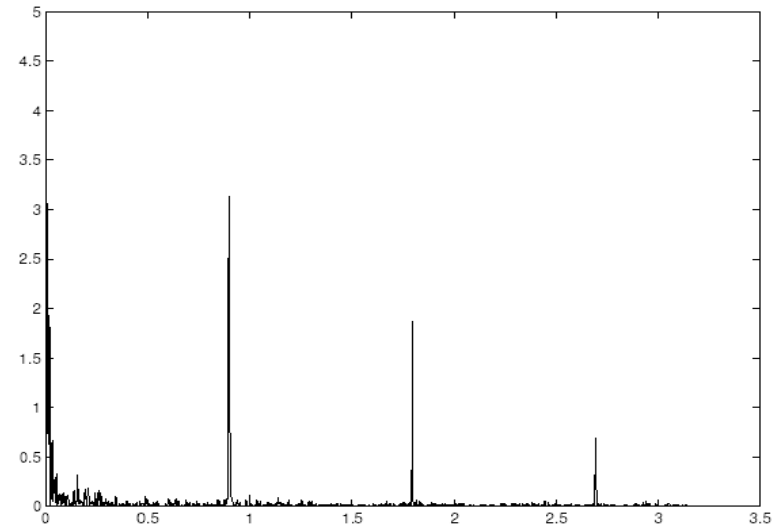
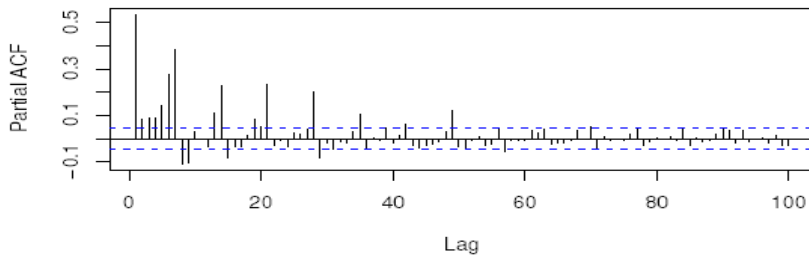
The 5 PM hour spot price

Presence of weakly seasonality in the log of price

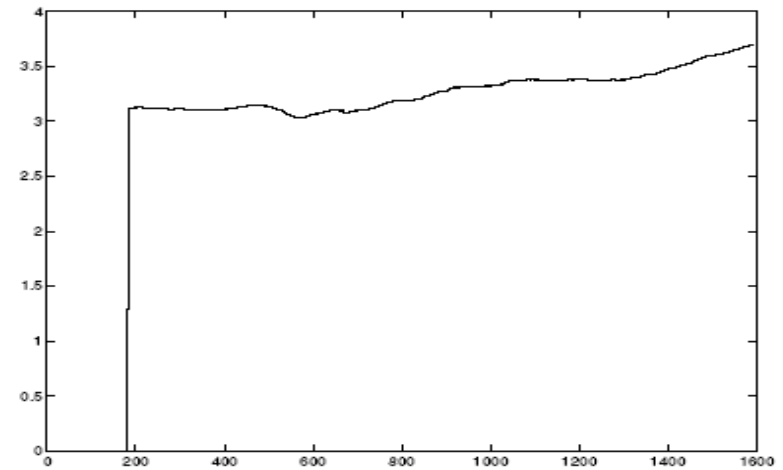
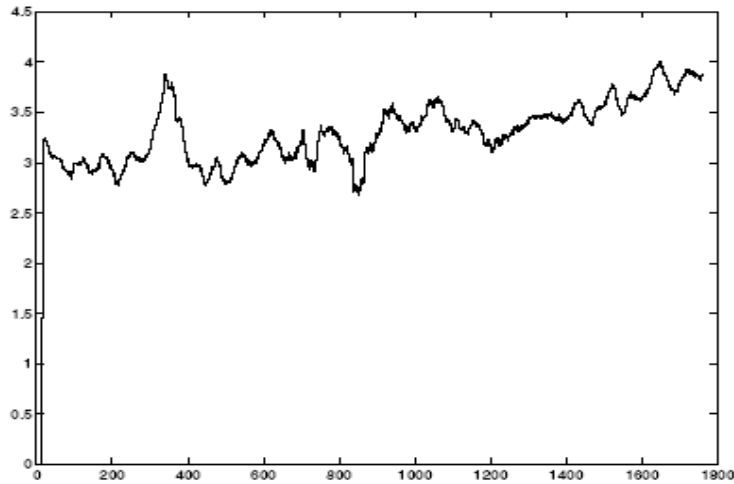
ACF de la série



ACF de la série



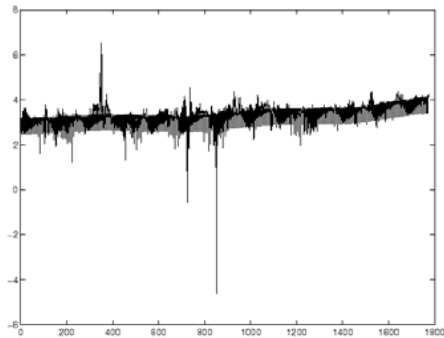
Main features : trend



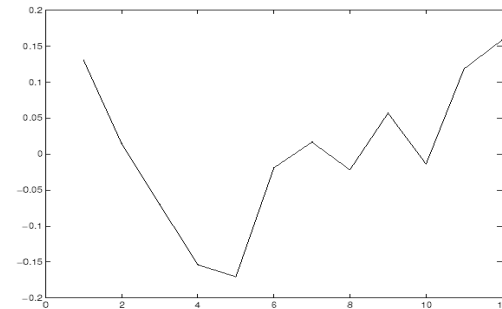
Presence of an increasing trend

The annually trend seem to evolve between the years

Main features : yearly seasonality

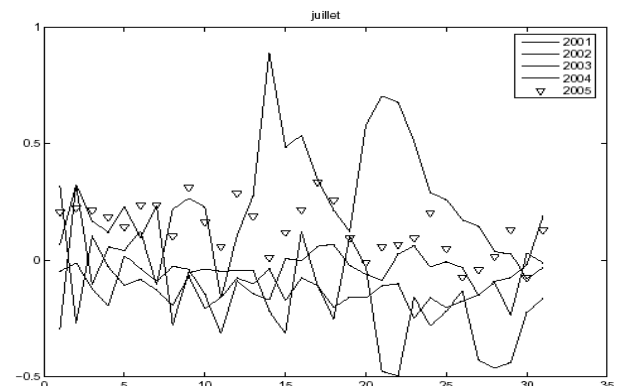
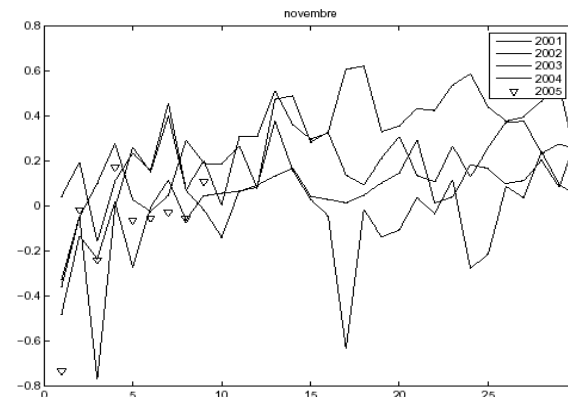
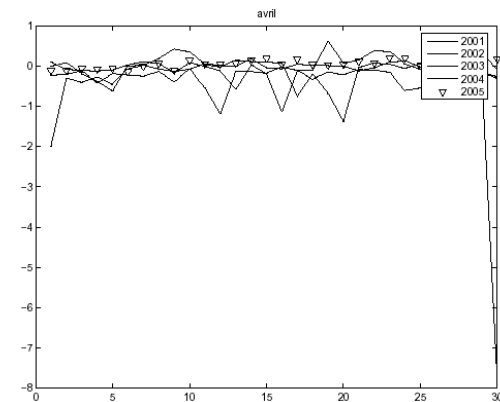
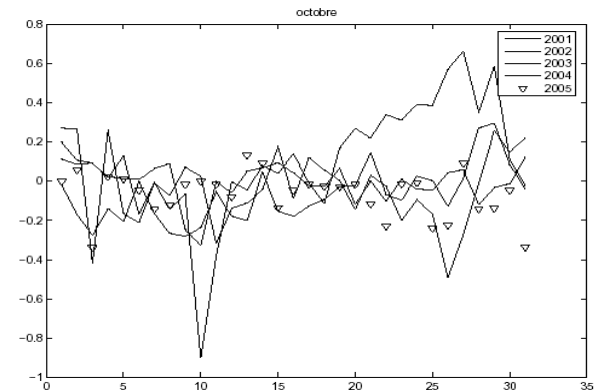
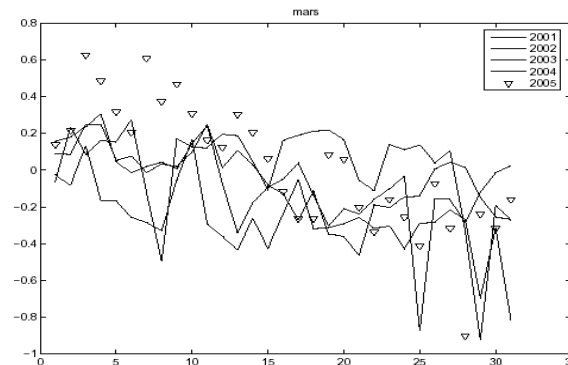
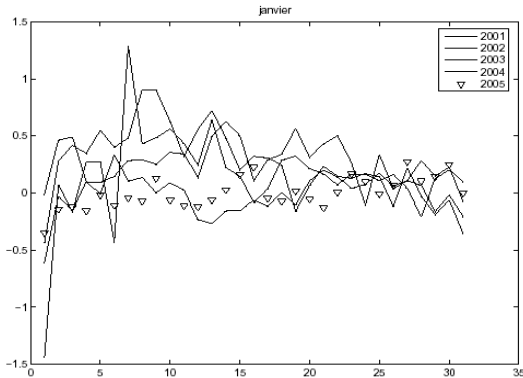


mois	moyenne	ecart-type
janvier	0.0864	0.3544
février	-0.0088	0.3274
mars	-0.0461	0.4526
avril	-0.0984	0.7845
mai	-0.1128	0.4684
juin	-0.0102	0.4842
juillet	0.0111	0.4717
août	-0.0143	0.4231
septembre	0.0367	0.3902
octobre	-0.009	0.4335
novembre	0.064	0.3967
décembre	0.0844	0.7248



- mean of months are very distincts
- we have the same global shape every year

Main features : yearly seasonality



- mean of months are very distincts
- we have the same global shape every year

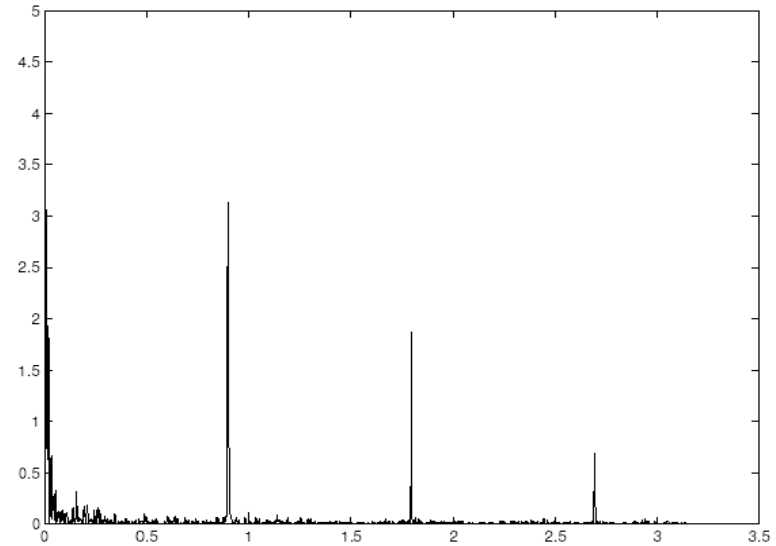
Main features : yearly seasonality

- There exists the same factors that drives the monthly trend in the same direction
- But the way this trend is followed is not unique.
- We can recognize the demand and supply effect of temperature, servicing, lighting...

.

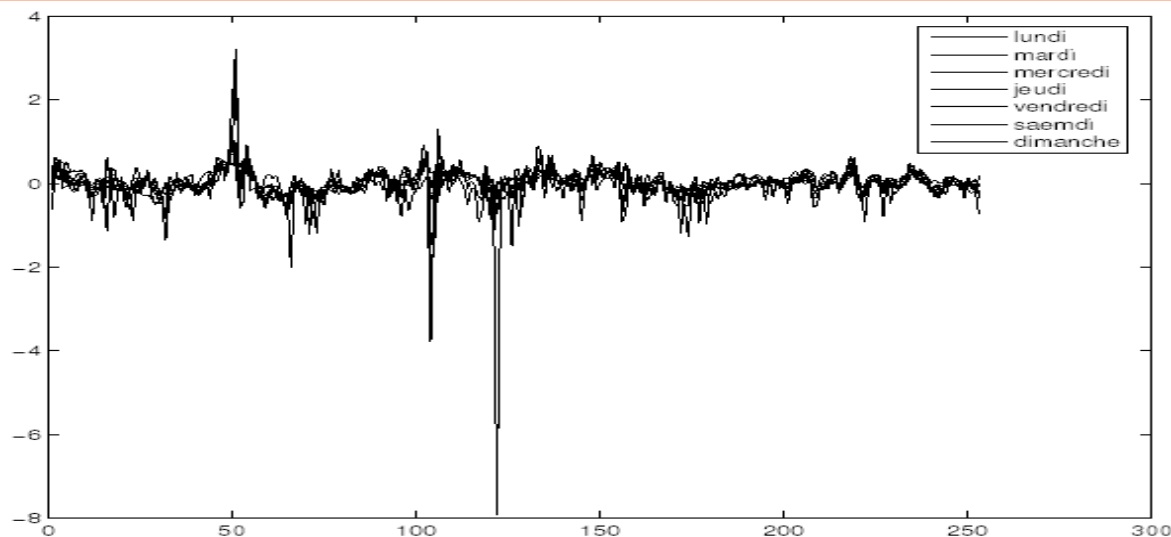
Main features : weekly seasonality

day	mean	standard error
monday	3.4679566	0.2005118
thursday	3.4956885	0.1492338
wednesday	3.4811213	0.1443400
thursday	3.425797	0.456650
friday	3.3471612	0.1178646
saturday	3.0994571	0.1150478
sunday	2.7928518	0.1603721



- the distribution seem to vary accross days
- mean acroos days are not the same, neither do the variances of each day

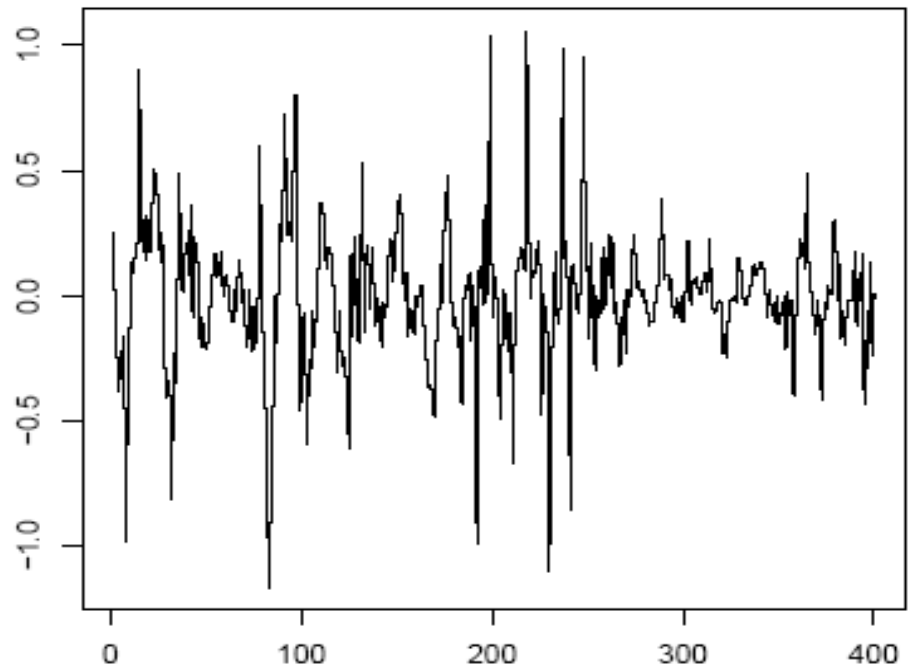
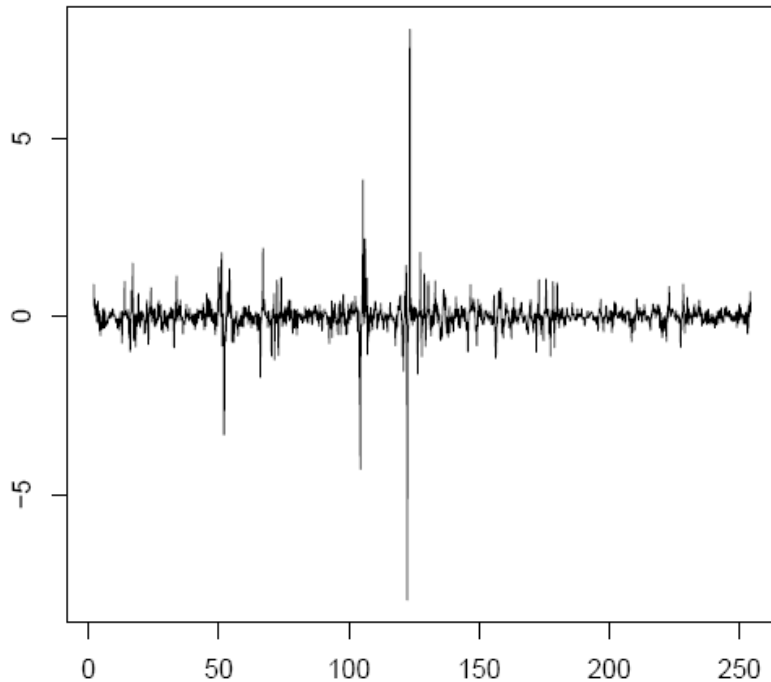
Main features : weekly seasonality



day	monday	tuesday	wednesday	thursday	friday	saturday	sunday
monday	1.0000000	0.7354174	0.6399122	0.3368653	0.6079144	0.5443208	0.5356925
tuesday	0.7354174	1.0000000	0.8237502	0.4944711	0.6933143	0.6219443	0.5649168
wednesday	0.6399122	0.8237502	1.0000000	0.5659056	0.7790230	0.6365449	0.5948865
thursday	0.3368653	0.4944711	0.5659056	1.0000000	0.5379592	0.4791834	0.4389093
friday	0.6079144	0.6933143	0.7790230	0.5379592	1.0000000	0.7697907	0.7152189
saturday	0.5443208	0.6219443	0.6365449	0.4791834	0.7697907	1.0000000	0.8435626
sunday	0.5356925	0.5649168	0.5948865	0.4389093	0.7152189	0.8435626	1.0000000

- The correlation between days prices are high
- This can be interpreted by the existence of factors that drive together an important part of the weekly dynamic .

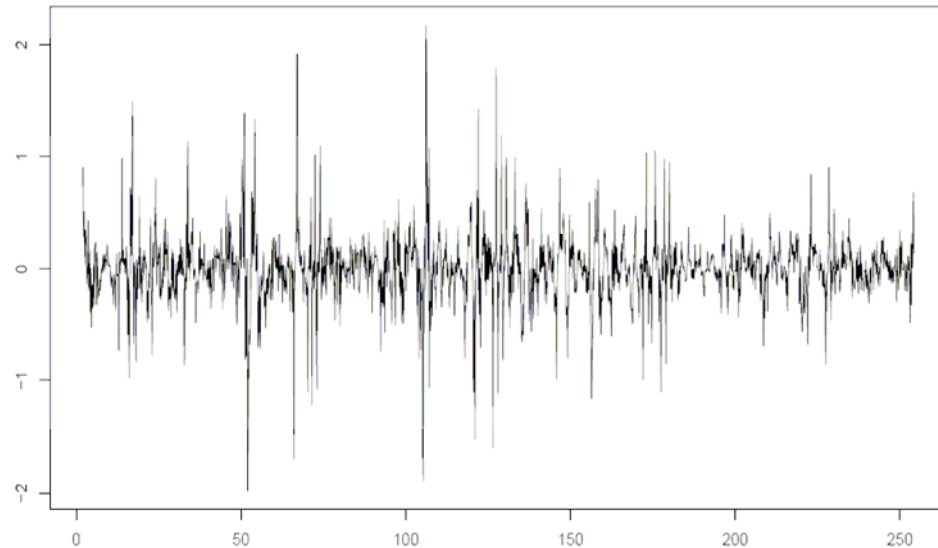
Main features : complex volatility



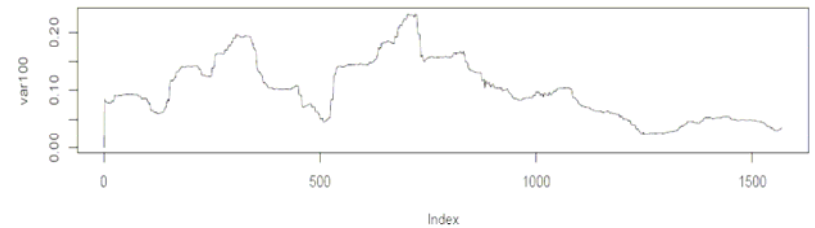
- The return $\log(P(t+7)/P(t))$ seems to be enough stationary for standard stochastic process
- It exhibits volatility clustering.

Main features : complex volatility

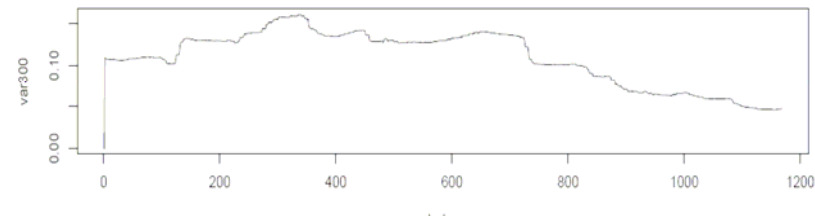
Différenciation à l'ordre 7 de la série



variance glissante sur 100 jours



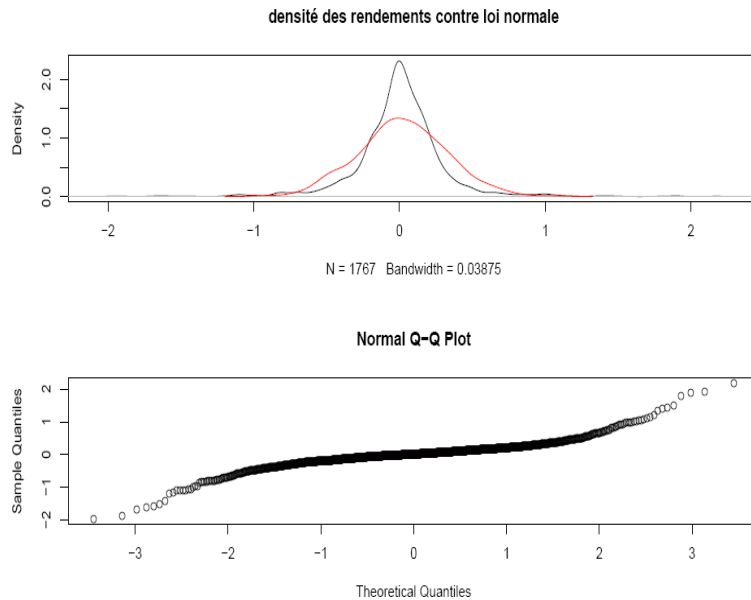
variance glissante sur 300 jours



The volatility seems to decrease.

It may reveal the lack of market maturity

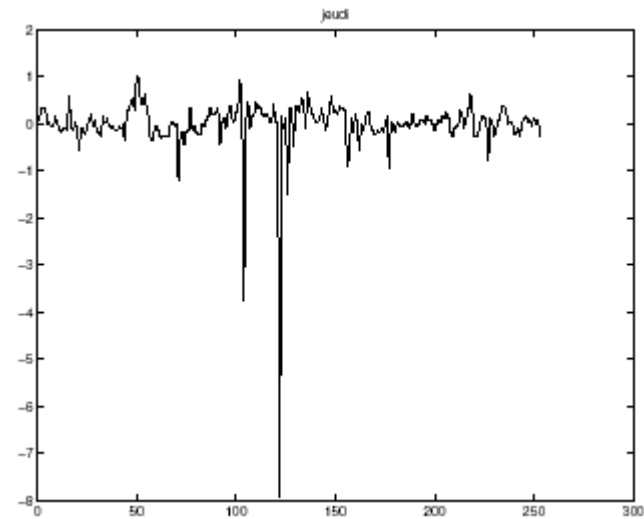
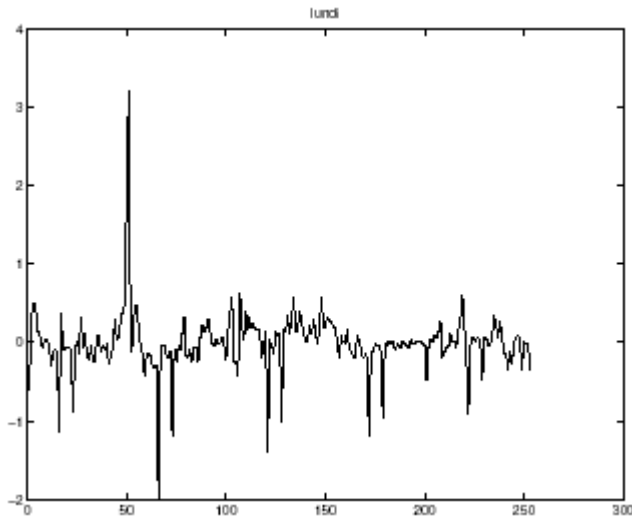
Main features : complex volatility



The volatility seems to decrease.

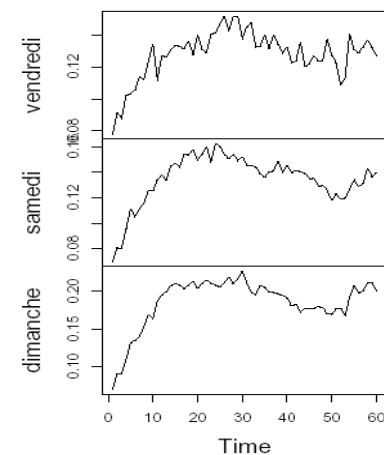
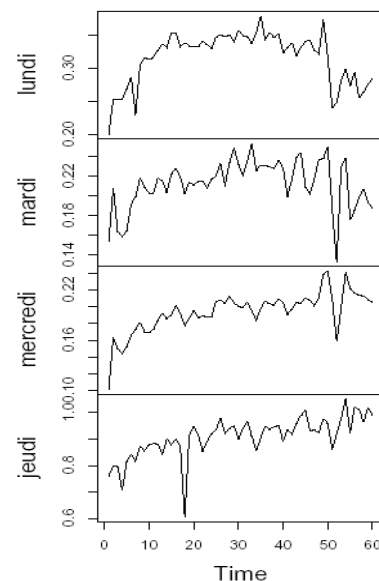
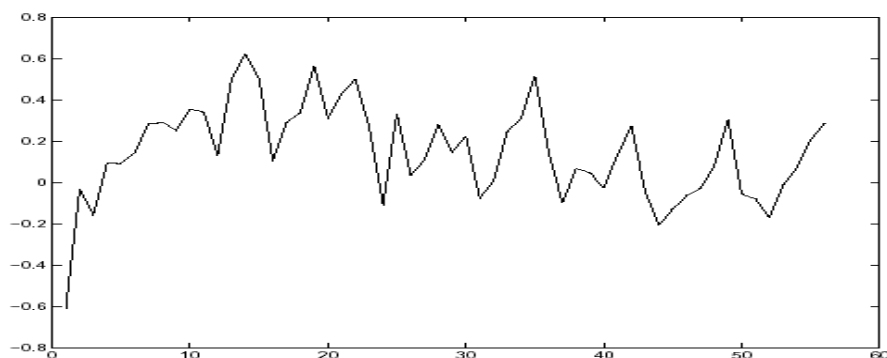
It may reveal the lack of market maturity

Main features : extreme values



- There are some extreme values that are due to special dates, as official holidays,
- These extreme values are due to the sensible nature of the market and to peaks in demand induced at official holidays
- These values may influence the estimation : one way is to replace these values

Main features : persistence of shocks on the week



- The week scheme does not seem to be erased by a simple regression
- The k difference variance cumulative graph is decreasing is increasing on a period of 10 weeks. It seems that the prices evolve as a random walk of pulsation 7 days.

3

Proposition of a model

Proposition of a model

Ad hoc methodology

Models specification of these methodology

The ARIMA framework

Efficient Seasonal Unit root Test

Proposition of a model : Ad hoc methodology

- The exponential weighted moving average

$$m_T = \sum_{j=0}^{T-1} w_j y_{T-j} \quad \hat{y}_{T=l|T} = m_T, l = 1, 2, \dots$$

- We assume :

$$\left. \begin{aligned} m_T &= \lambda \sum_{j=0}^{T-1} (1 - \lambda)^j y_{T-j} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{T-1} w_j &= \lambda \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{T-1} (1 - \lambda)^j = 1 \end{aligned} \right|$$

$$m_t = (1 - \lambda)m_{t-1} + \lambda y_t,$$

- The coefficient allows to provide more weight to the last observations of the process.
- The prevision only use the mean of the process, but this mean is calculated « locally »

Proposition of a model : Ad hoc methodology

- Holt winters methodology to include trending local evolution :

$$\begin{array}{l|l} \hat{y}_{T+l|T} = m_T + B_T l & \hat{y}_{t|t-1} = m_{t-1} + b_{t-1} \\ \hline m_t = \lambda_0 y_t + (1 - \lambda_0)(m_{t-1} + b_{t-1}) & b_t = \lambda_1(m_t - m_{t-1}) + (1 - \lambda_1)b_{t-1} \\ \hline \left\{ \begin{array}{l} m_t = m_{t-1} + b_{t-1} + \lambda \hat{v}_t \\ b_t = b_{t-1} + \lambda_0 \lambda_1 \hat{v}_t \end{array} \right. & \end{array}$$

- Here a trending term is added, and the mean is calculated simultaneously on the trend and the constant
- This specification accept local evolution of trend

Proposition of a model : Ad hoc methodology

- Holt-Winters with seasonally adjustment :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_t = \lambda_0(y_t - c_{t-s}) + (1 - \lambda_0)(m_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \lambda_1(m_t - m_{t-1}) + (1 - \lambda_1)b_{t-1} \\ c_t = \lambda_s(y_t - m_t) + (1 - \lambda_s)c_{t-s} \end{array} \right.$$

- Three constants are used to capture trend, level and seasonality
-

Proposition of a model : Models specification

- State space model

- Measure equation

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \quad V(\epsilon_t) = H_t \quad |$$

- State equation:

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + R_t \eta_t, \quad V(\eta_t) = Q_t \quad |$$

Définition 2.2.1 (Filtre invariant dans le temps) *Le filtre présenté plus haut est dit à coefficients invariants dans le temps si : $T_t = T$, $Z_t = Z$, $R_t = R$, $H_t = H$ et $Q_t = Q$*

- Filtration:

$$\mathbb{F}_t = \sigma(Y_t, Y_{t-1}, \dots) \quad |$$

- One step ahead Forecast

$$a_t = E(\alpha_t | \mathbb{F}_t) \quad |$$

$$a_{t|h} = E[\alpha_t | \mathbb{F}_h]$$

- Quadratic error term of forecasting of the factor:

$$P_t = E[(\alpha_t - a_t)(\alpha_t - a_t)'] \quad |$$

- Variance of the h step forecast predictor :

$$P_{t|h} = E[(\alpha_t - a_{t|h})(\alpha_t - a_{t|h})'] \quad |$$

Proposition of a model : Models specification

- State space model
- Computation of one step predictor

$$a_{t|t-1} = T_t a_{t-1} + c_t \quad |$$

$$P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t + R_t Q_t R_t$$

- Actualisation equation:

$$a_t = a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} (y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t) \quad |$$

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1} \quad |$$

Proposition of a model : Models specification

- A filter is in stable state if :

$$P_{t+1|t} = \hat{P} \quad |$$

$$\hat{P} - T\hat{P}T' + T\hat{P}Z'(Z\hat{P}Z' + H)^{-1}Z\hat{P}T' - RQR' = 0 \quad |$$

- Under some assumption on the Transitions matrix :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{t+1|t} = \bar{P} \quad |$$

Proposition of a model : Models specification

- Example the random walk plus noise :

Marche aléatoire en niveau + bruit Le modèle à niveau local s'écrit à la base sous la forme suivante : $y_t = \mu_t + \epsilon_t$ avec $\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$ ϵ et η étant des bruits blancs. il est possible de rajouter une tendance linéaire dans l'équation de mesure : $y_t = \mu_t + \beta t + \epsilon_t$

Considérons le modèle de marche aléatoire en niveau avec bruit. Posons $\sigma_*^2 = \sigma_\epsilon^2$ et $\sigma_\eta = \sigma_\epsilon^2 q$
Notons $m_{t+1|t}$ l'estimateur du vecteur d'état, μ_{t+1} , au temps t , le filtre de Kalman devient

$$m_{t+1|t} = (1 - k_t)m_{t|t-1} + k_t y_t$$

avec un gain : $k_t = \frac{p_{t|t-1}}{p_{t|t-1} + 1}$ et

$$p_{t+1|t} = p_{t|t-1} - \frac{p_{t|t-1}^2}{1 + p_{t|t-1}} + q$$

- We get the relation in the stable state of the filter:

$$m_t = (1 - \lambda)m_{t-1} + \lambda y_t$$

$$\lambda = \frac{\bar{p}}{1 + \bar{p}} = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2 + q + \sqrt{q^2 + 4q}}$$

Proposition of a model : Models specification

- This model gives assumption on the process to justify use of exponential smoothing
- Kalman filter can be estimated by MLE so we can get all the parameter to estimate the smoothing constant
- Test procedure for the value of the constant is possible, assuming that the process is generated by this type of DGP
- We can see here limit of the exponential smoothing : the type of dynamic its assumes may be poor.
- It is possible to extend this type of model, to reconstruct by the same procedure the model that generate Holt Winters model with trend and seasonalities
- Cleveland and Tiao (1976) shows that this type of model can not be used for classical series, even if it works well on lots

Proposition of a model : the ARIMA framework

Définition 2.1.4 Nous appelons L l'opérateur retard de la manière suivante :

$$LX_t = X_{t-1}$$

Définition 2.1.6 Un processus X est appelé marche aléatoire complexe à la fréquence ω si elle peut se mettre sous la forme :

$$X_t = e^{i\omega} X_{t-1} + \epsilon_t$$

avec ϵ un processus stationnaire.

Dans le cas où notre série est réelle, l'existence d'une fréquence d'intégration ω implique que X puisse s'écrire :

$$(I - e^{i\omega} L)((I - e^{-i\omega} L)X_t = \epsilon_t.$$

Définition 2.1.7 Un processus X est un ARMA(p, q) s'il existe $(a_i)_{i=1:p}$ et $(b_j)_{j=1:q}$ tels que :

$$X_t - \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} = \epsilon_t - \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j}$$

Proposition of a model : economic explanations

- All the process we define above were ARIMA. But they were constrained in the class of ARIMA process.
 - Is our process integrated to all the pulsation, not, or only one of them ?
 - As we have seen above, the ARIMA framework is a natural framework to work in. It is indeed general, and by some aspect intuitive (see above)
 - We have to work in for more practical reason : because of the possibility to construct powerful test for the presence of unit roots.
- .Should we difference the serie ie work on $X(t+7)-X(t)$, or project the serie on sinus and cosinus of the pulsation, for some pulsation ?

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- Because of the complexity of the autocorrelation that a stationary process may have, literature constructed tests for testing unit root.
- Here, we consider the model :

$$\begin{aligned} y_t &= d_t + x_t, \\ (1 - 2\cos\omega B + B^2)x_t &= (1 - e^{-i\omega} B)(1 - e^{i\omega} B)x_t = \eta_t \end{aligned}$$

Properties of the innovation process

$\{\epsilon_t\}$ est une différence de martingale satisfaisant : $E(\epsilon_t|\mathbb{F}_{t-1}) = 0$, et $E(\epsilon_t^2|\mathbb{F}_{t-1}) = \sigma^2$
et il existe un $\delta > 0$ tel que : $\sup_t E(\epsilon_t^{2+\delta}|\mathbb{F}_{t-1}) < \infty$ p.s., où $\mathbb{F}_{t-1} = \sigma(\epsilon_{t-l}, l = 1, 2, \dots)$

Chan et Wei(1988) ont démontré le résultat suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{[T\tau]} e^{i\omega t} \epsilon_t \implies \sqrt{\frac{\sigma^2}{2}} W(\tau)$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- **Definition 1** *L'opérateur d'intégration S_ω associe à n'importe quelle séquence $\{\epsilon_t, t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ une suite $\{S_\omega \epsilon_t, t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ définie par :*

$$S_\omega \epsilon_t = \begin{cases} \sum_{\tau=1}^t \epsilon_\tau e^{-i\omega(t-\tau)} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -\sum_{\tau=t+1}^0 \epsilon_\tau e^{-i\omega(t-\tau)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.3)$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

Proposition 1

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], (1 - e^{i\omega} B) S_{\omega} = I$$

Proposition 2

$$\forall x_t \in \mathbb{R}, \forall \omega \in [-\pi, \pi], S_{\omega}(1 - e^{i\omega} B)x_t = x_t - x_0 e^{-i\omega t}$$

Proposition 3

$$\forall \omega \in]0, \pi[, e^{i\omega} S_{-\omega} - e^{-i\omega} S_{\omega} = (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) S_{\omega} S_{-\omega}$$

Après manipulations, on obtient:

$$y_t - \frac{\sin \omega(t+1)}{\sin \omega} y_0 + \frac{\sin \omega}{\sin \omega} y_{-1} = \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - e^{-i\omega}} S_{-\omega} \epsilon_t + \frac{e^{-i\omega}}{e^{-i\omega} - e^{i\omega}} S_{\omega} \epsilon_t$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

Dans le cas simple considéré dans cette partie, un test de présence de racines unitaires complexes dans le DGP de y_t reviendrait à tester la non significativité des coefficients a_1 et a_2 de la régression :

$$\Delta_{\omega} y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \epsilon_t \quad (6.5)$$

Il est utile de réécrire l'équation 6.5 sous une forme qui fait apparaître la marche aléatoire complexe :

$$\Delta_{\omega} y_t = \gamma_+ (1 - e^{-i\omega} B) y_{t-1} + \gamma_- (1 - e^{i\omega} B) y_{t-1} + \epsilon_t \quad (6.7)$$

où nous avons:

$$\gamma_+ = \frac{a_1 e^{i\omega} + a_2}{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}$$

et

$$\gamma_+^- = \gamma_-$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- Nous devons considérer un autre type de spécification. Nous savons que l'introduction d'un coefficient de tendance affecte le comportement asymptotique des estimateurs \hat{a}_1 et \hat{a}_2 . Dans le cas où $\omega = 0$ le terme déterministe à considérer était une constante, ou une tendance linéaire. L'on peut généraliser les fonctions déterministes annullables par $(I - B)^n$ comme des polynômes de degré $n-1$. Dans le cas de racines unitaires complexes, ces polynômes deviennent des polynômes complexes. Les fonctions déterministes qui annulent l'opérateur $(I - e^{i\omega}B)^n$ sont des combinaisons linéaires des $\{t^k e^{i\omega t}, t^k e^{-i\omega t}, k = 0, \dots, n - 1\}$.

Nous sommes donc obligés de considérer la régression avec constante :

$$\Delta_{\omega} y_t = b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t + a_1 y_t + a_2 y_{t-2} + \epsilon_t \quad (6.8)$$

cette équation peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\Delta_{\omega} y_t = \nu_+ e^{i\omega(t-1)} + \nu_- e^{-i\omega(t-1)} + \gamma_+(1 - e^{-i\omega}B)y_{t-1} + \gamma_-(1 - e^{i\omega}B)y_{t-1} + \epsilon_t \quad (6.9)$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- **Lemma 6.1** Soit y_t un processus stochastique généré par $\Delta_{\omega} y_t = \epsilon_t$ où ϵ_t satisfait l'hypothèse θ , alors en notant $\hat{\gamma}_+$ l'estimateur de γ_+ dérivé des MCO de a_1 et a_2 , quand T tend vers l'infini.

sous la spécification 6.5 et 6.7,

$$T\hat{\gamma}_+ \implies e^{i\omega} \left(\int_0^1 W\bar{W}d\tau \right)^{-1} \int_0^1 Wd\bar{W}$$

sous la spécification 6.8 et 6.9,

$$T\hat{\gamma}_+ \implies e^{i\omega} \left(\int_0^1 W_*\bar{W}_*d\tau \right)^{-1} \int_0^1 W_*d\bar{W}$$

où $W_*(\tau) = W(\tau) - \int_0^1 W(u)du$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- $$F_\omega = T \frac{\sum_t \hat{\gamma}_+ (y_{t-1} - e^{-i\omega} y_{t-2})}{\sum_t \hat{\epsilon}_t^2}$$

ou avec des quantité réelles :

$$F_\omega = T \frac{(\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 + 2\cos\omega \hat{a}_1^2 \hat{a}_2^2) \sum_t (y_{t-1}^2 + y_{t-2}^2 - 2\cos\omega y_{t-1} y_{t-2})}{\sum_t \hat{\epsilon}_t^2}$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

Lemma 6.2

$$T\hat{a}_1 \implies \left(\int_0^1 W\bar{W}d\tau \right)^{-1} \left(e^{i\omega} \int_0^1 Wd\bar{W} + e^{-i\omega} \int_0^1 \bar{W}dW \right)$$

$$T\hat{a}_2 \implies - \left(\int_0^1 W\bar{W}d\tau \right)^{-1} \left(\int_0^1 Wd\bar{W} + \int_0^1 \bar{W}dW \right)$$

$$t_{\hat{a}_2} \implies - \left(\int_0^1 W\bar{W}d\tau \right)^{-1/2} \left(\int_0^1 Wd\bar{W} + \int_0^1 \bar{W}dW \right)$$

$$F_\omega \implies \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{W}dW \left(\int_0^1 W\bar{W}d\tau \right)^{-1} \int_0^1 Wd\bar{W}$$

sous les spécifications 6.5 et 6.7

$$T\hat{a}_1 \implies \left(\int_0^1 W_*\bar{W}_*d\tau \right)^{-1} \left(e^{i\omega} \int_0^1 W_*d\bar{W} + e^{-i\omega} \int_0^1 \bar{W}_*dW \right)$$

$$T\hat{a}_2 \implies - \left(\int_0^1 W_*\bar{W}_*d\tau \right)^{-1} \left(\int_0^1 W_*d\bar{W} + \int_0^1 \bar{W}_*dW \right)$$

$$t_{\hat{a}_2} \implies - \left(\int_0^1 W_*\bar{W}_*d\tau \right)^{-1/2} \left(\int_0^1 W_*d\bar{W} + \int_0^1 \bar{W}_*dW \right)$$

$$F_\omega \implies \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{W}_*dW \left(\int_0^1 W_*\bar{W}_*d\tau \right)^{-1} \int_0^1 W_*d\bar{W}$$

sous les spécifications 6.8 et 6.9

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

-

La statistique de test introduite ici est reliée à la statistique de test de Fisher standard.

La statistique t_ω sera utilisée pour réaliser le test :

$$H_0^1 : a_2 = 0 \quad / \quad H_a^1 : a_2 > 0.$$

Quant à F_ω , elle permettra de statuer sur le test :

$$H_0^1 : a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = 0 \quad / \quad H_a^1 : a_1 \neq 0 \quad \text{ou/et} \quad a_2 > 0.$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- Here the process is autocorrelated :there is existence of nuisance parameter

Assumption 1 $c(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j B^j$ est tel que :

$$\sum_0^{\infty} j c_j < +\infty$$

Lemma 6.3 Soit $\{y_t\}$ un processus stochastique généré par $\Delta_{\omega} y_t = \eta_t$ où $\eta_t = c(B)\epsilon_t$ et $\{\epsilon_t\}$ satisfait l'hypothèse 6 et $c(B)$ satisfait l'hypothèse 1, lorsque T tend vers l'infini :

sous la spécification 6.5 et 6.7,

$$T\hat{\gamma}_+ \implies e^{i\omega} \left(\int_0^1 W \bar{W} d\tau \right)^{-1} \left(\int_0^1 W d\bar{W} + \frac{\sum_{h=1}^{+\infty} \Gamma_{\Delta_{\omega} y}(h) e^{-i\omega h}}{\pi f_{\Delta_{\omega} y}(\omega)} \right)$$

sous la spécification 6.8 et 6.9,

$$T\hat{\gamma}_+ \implies e^{i\omega} \left(\int_0^1 W_* \bar{W}_* d\tau \right)^{-1} \left(\int_0^1 W_* d\bar{W} + \frac{\sum_{h=1}^{+\infty} \Gamma_{\Delta_{\omega} y}(h) e^{-i\omega h}}{\pi f_{\Delta_{\omega} y}(\omega)} \right)$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- $$T\hat{a}_1 \implies \left(\int_0^1 W\bar{W}d\tau \right)^{-1} \left(e^{i\omega} \int_0^1 Wd\bar{W} + e^{-i\omega} \int_0^1 \bar{W}dW \right)$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- Pour obtenir une formulation libre de tout paramètre, nous avons à insérer dans l'expression précédente des estimateurs consistants de la densité spectrale à la fréquence ω et de la quantité $\sum_{h=1}^{+\infty} \Gamma_{\Delta_{\omega}y}(h)e^{-i\omega h}$ lorsque l'on travaille avec une représentation complexe ou de la variance du processus d'étude et de la quantité $\sum_{h=1}^{+\infty} \Gamma_{\Delta_{\omega}y}(h)\sin(\omega h)$ lorsque l'on travaille avec des coefficients réels. Soit \hat{A}_{ω} un estimateur de $\sum_{h=1}^{+\infty} \Gamma_{\Delta_{\omega}y}(h)e^{-i\omega h}$, nous notons $\hat{\gamma}_+^*$ l'estimateur modifié :

$$\hat{\gamma}_+^* = \hat{\gamma}_+ - \frac{T e^{i\omega} \hat{A}_{\omega}}{\sum_{t=1}^T y_{t-1} - e^{i\omega} y_{t-2}^2}$$

alors la statistique de test F'_{ω} pour la non-significativité de γ_+ :

$$F'_{\omega} = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_+^* (y_{t-1} - e^{i\omega} y_{t-2})^2}{2\pi \hat{f}_{\Delta_{\omega}y}(\omega)}$$

est libre de tout paramètre et possède la même loi asymptotique que F_{ω} dans le cadre du lemme 6.2 . De manière similaire, si nous notons \hat{a}_2^* l'estimateur modifié suivant:

$$\hat{a}_2^* = \hat{a}_2 + \frac{T(2\pi \hat{f}_{\Delta_{\omega}y}(\omega) - \hat{\Gamma}_{\Delta_{\omega}y}(0))}{\sum_{t=1}^T y_t - e^{i\omega} y_{t-1}^2},$$

nous pouvons montrer qu'il est tel que $T\hat{a}_2^*$ et $\sqrt{\hat{\Gamma}_{\Delta_{\omega}y}(0)} 2\pi \hat{f}_{\Delta_{\omega}y}(\omega) \frac{\hat{a}_2^*}{\sqrt{V_{\hat{a}_2}}}$ ont les mêmes distributions asymptotiques libres de tout paramètre;

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- Nous restreignons notre attention au cas d'une tendance déterministe d_t de la forme :

$$d_t = (\mu_+ + \lambda_+ t)e^{i\omega t} + (\mu_- + \lambda_- t)e^{-i\omega t} \quad (6.10)$$

Il peut sembler intéressant de tester la présence d'une paire de racines unitaires complexes en présence de tendance linéaire. Il est possible d'étudier les propriétés des coefficients estimés sous deux formes. D'une part, lorsque l'on réalise une régression de $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sous la spécification 6.8 et 6.9, et d'autre part, sur les résidus de $\{y_t\}$ projeté sur les fonctions déterministes $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}, te^{i\omega t}, te^{-i\omega t}\}$.

En effet, nous observons que :

$$\Delta_\omega y_t = \lambda_+(1 - e^{-2i\omega})e^{i\omega t} + \lambda_-(1 - e^{2i\omega})e^{-i\omega t} + \eta_t$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test



-

Lemma 6.4 Soit $\{y_t\}$ un processus stochastique généré par 6.2 avec d_t défini par 6.10 et $\eta_t = c(B)\epsilon_t$ où $\{\epsilon_t\}$ satisfait l'hypothèse 6 et $c(B)$ satisfait 1, alors lorsque T tend vers $l'∞$, si $\hat{\gamma}_+$ est l'estimateur des MCO dérivé de 6.8 et 6.9 :

$$T^{3/2}\hat{\gamma}_+ \rightarrow \frac{12e^{i\omega}\sigma c(e^{-i\omega})}{\sqrt{2\pi}\lambda_+(1 - e^{-2i\omega})} \int_0^1 (t - 1/2)d\bar{W}$$

$$T^{3/2}\hat{a}_2 \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{24\pi f_\eta(\omega)}{\lambda_+(1 - e^{-2i\omega})^2}\right)$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

-

Lemma 6.6 Soit $\{\hat{y}_t\}$ le résidu de $\{y_t\}$ défini comme dans le lemme 6.4 projeté sur $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}, te^{i\omega t}, te^{-i\omega t}\}$, alors lorsque T tend vers $+\infty$, si $\hat{\gamma}_+$ est l'estimateur des MCO estimé sous la spécification 6.5 et 6.7 :

$$\hat{\gamma}_+ \rightarrow e^{i\omega} \left(\int_0^1 W_{**} \bar{W}_{**} \right) \left(\int_0^1 W_{**} d\bar{W} + \frac{\sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_{\Delta\omega\hat{y}}(h) e^{-i\omega h}}{\Delta\omega\hat{y}(\omega)} \right)$$

avec $W_{**} = W - [4 \int_0^1 W d\tau - 6 \int_0^1 \tau W d\tau] - t[12 \int_0^1 \tau W d\tau - 6 \int_0^1 W d\tau]$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- 6.4 Suite de processus presque intégrés

Beaucoup d'attention a été portée à l'étude des processus presque intégrés. On définit d'abord les processus presque intégrés, leur comportement asymptotique, les propriétés statistiques induites par ces processus.

Definition 2 Une suite de processus presque intégrés saisonnièrement est un ensemble $\{x_{T,t}, 1 \leq t \leq T\}_{T=1}^{T=\infty}$ générée pour chaque valeur de T selon la dynamique :

$$\Delta_{c,\omega} x_{T,t} = (1 - 2(1 - \frac{c}{T})(1 - \cos\omega B) + (1 - \frac{c}{T})) \eta_t$$

pour $t = 1, \dots, T, \omega \in]0, \pi[$ et η_t est un processus stationnaire au second ordre.

Notons que

$$\Delta = (1 - (1 - cT)e^{i\omega B})(1 - (1 - \frac{c}{T})e^{-i\omega B})$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

Definition 3 L'opérateur d'intégration $S_{c,T,\omega}$ associé à la suite $\epsilon_t = \{\epsilon_t, t = 1, \dots, T\}$ de \mathbb{R}^T est défini par : $S_{c,T,\omega} = \sum_{\tau=1}^t \epsilon_\tau (1 - \frac{c}{T})^{t-\tau} e^{-i\omega(t-\tau)}$ pour $t \geq 1$

Theorem 6.1 Soit $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique satisfaisant l'hypothèse 6, alors $\forall t \in [0, 1]$, si nous notons $D_c(t) = \frac{e^{-2c}(e^{2ct}-1)}{4c}$, quand T tend vers ∞ :

$$\frac{e^{i\omega[Tt]}}{\sqrt{T}} S_{c,T,\omega} \epsilon_{[Tt]} \rightarrow \sigma W(D_c(t)),$$

où $W(\cdot)$ est le mouvement brownien complexe standard défini à la partie précédente.

Nous noterons dans la suite : $W_c(t) = \sum_0^t e^{-c(t-s)} dW(s) = e^{-c(t-1)} W(2D_c(t))$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

- Dans cette partie sont présentés les résultats asymptotiques de tests de presque intégration. Ici, nous chercherons à savoir si $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ s'écrit sous la forme suivante:

$$y_t = d_t + x_t, \quad (6.11)$$

$$\Delta_{c,\omega} x_t = \eta_t$$

Lemma 6.7 *Soit $\{y_t\}$ un processus égal à $x_t + d_t$, où d_t est une fonction déterministe évoluant lentement dans le temps, et $\{x_t\}$ généré selon 6.12 avec $\eta = c(B)\epsilon_t$ telle que $\{\epsilon_t\}$ satisfait à l'hypothèse 6 et $c(B)$, l'hypothèse 1, alors lorsque T tend vers $+\infty$, sous la spécification 6.5 et 6.7 :*

$$T\hat{\gamma}_+ \rightarrow e^{i\omega} \left\{ -c + \left(\int_0^1 W_c \bar{W}_c d\tau \right)^{-1} \left(\int_0^1 W_c d\bar{W} + \frac{\sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_{\Delta_{\omega} y}(h) e^{-i\omega h}}{\pi f_{\Delta_{\omega} y}(\omega)} \right) \right\}$$

Proposition of a model : Efficient Unit Root test

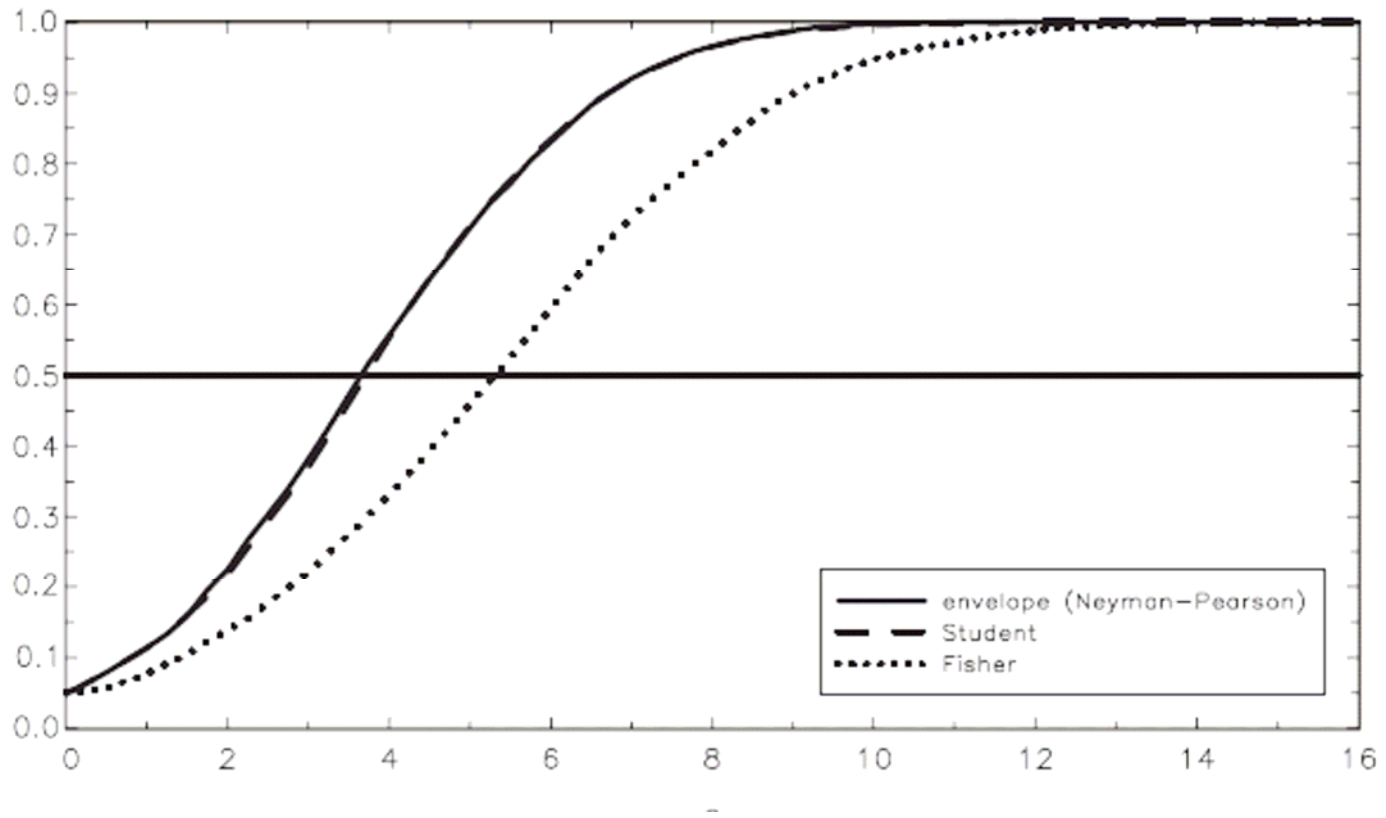
$$z_t = (e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}, te^{i\omega t}, te^{-i\omega t})$$

$$y_c = \left(y_1, y_2 - 2\left(1 - \frac{c}{T}\right) \cos \omega y_1, \Delta_{c,\omega} y_3, \dots, \Delta_{c,\omega} y_T \right)',$$

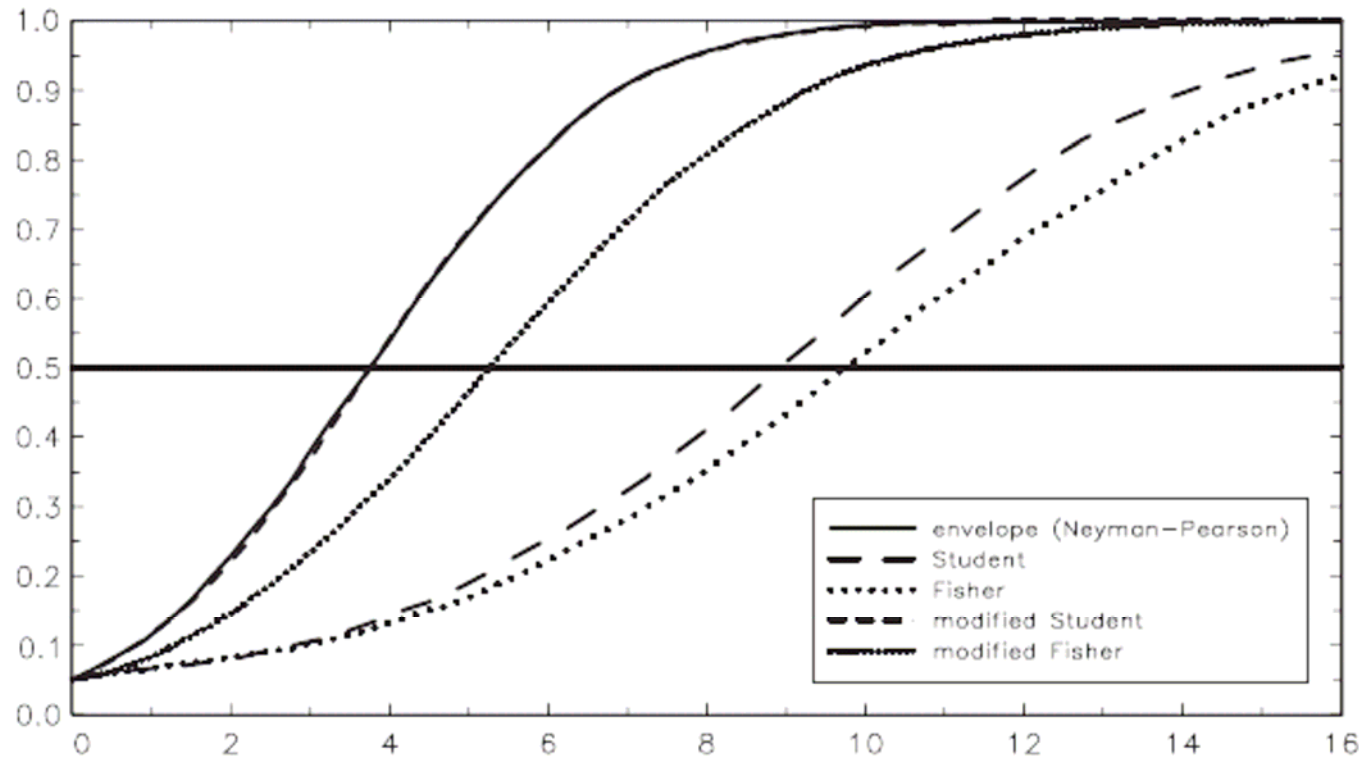
$$z_c = \left(z'_1, z'_2 - 2\left(1 - \frac{c}{T}\right) \cos \omega z'_1, \Delta_{c,\omega} z'_3, \dots, \Delta_{c,\omega} z'_T \right)'. \quad |$$

$$\tilde{\xi} = \frac{\min_v (y_c - z_c v)' (y_c - z_c v) - (1 - \frac{c}{T})^2 \min_v (y_0 - z_0 v)' (y_0 - z_0 v)}{2\pi \hat{f}(\omega)}, \quad |$$

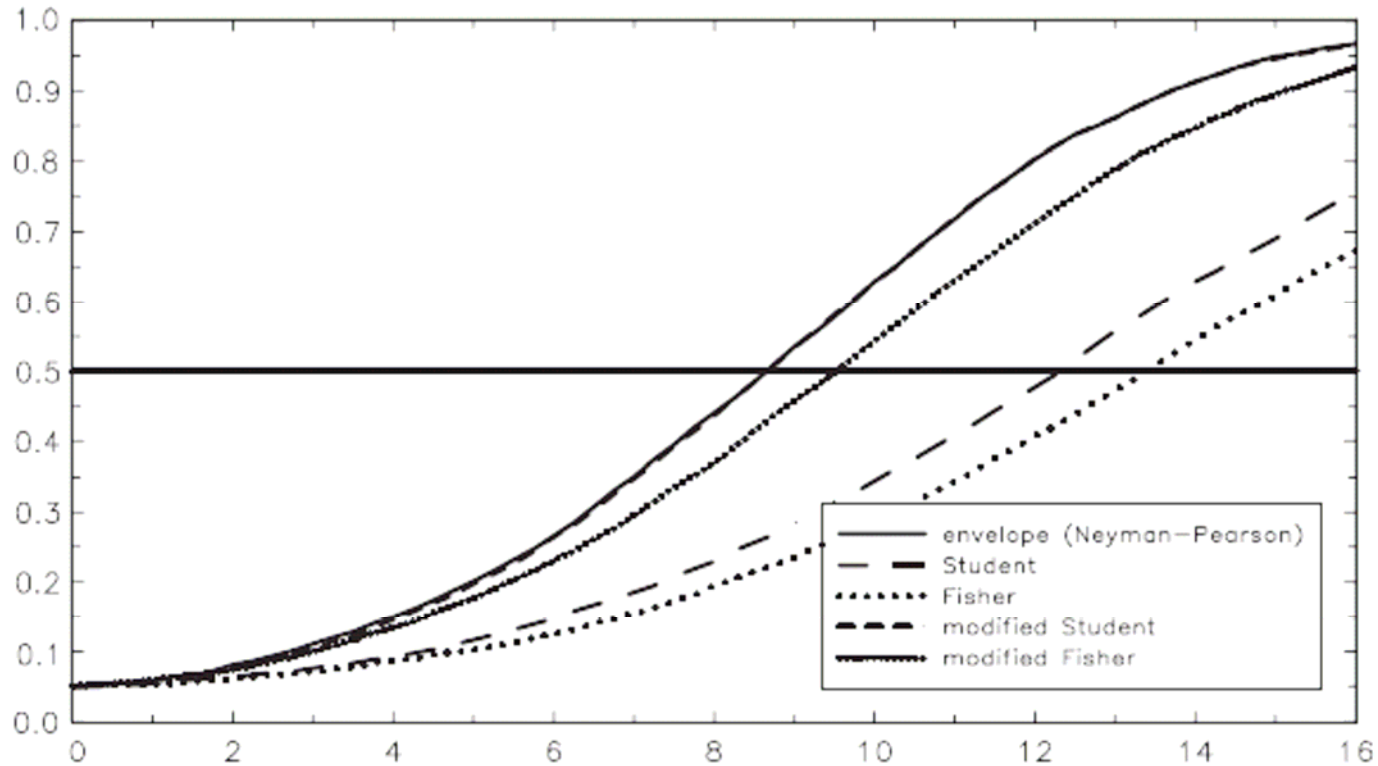
Proposition of a model : Efficient Unit Root test : no constant



Proposition of a model : Efficient Unit Root test : constant unknown



Proposition of a model : Efficient Unit Root test : constant + trend



Proposition of a model : Efficient Unit Root test : constant + trend

Table 1
Critical values (sine and cosine functions)

Test	Sample size	1%	2.5%	5%	10%
Neyman Pearson $c = 3.75$	1000	2.317	3.008	3.807	5.068
	200	2.157	2.816	3.546	4.734
	100	2.051	2.660	3.323	4.304
Student $c = 3.75$	1000	2.546	2.203	1.917	1.584
	200	2.549	2.202	1.890	1.560
	100	2.510	2.159	1.876	1.540
Fisher $c = 3.75$	1000	4.748	3.818	3.143	2.426
	200	5.032	3.953	3.215	2.441
	100	5.100	4.013	3.259	2.473

Table 2
Critical values (trending sine and cosine functions)

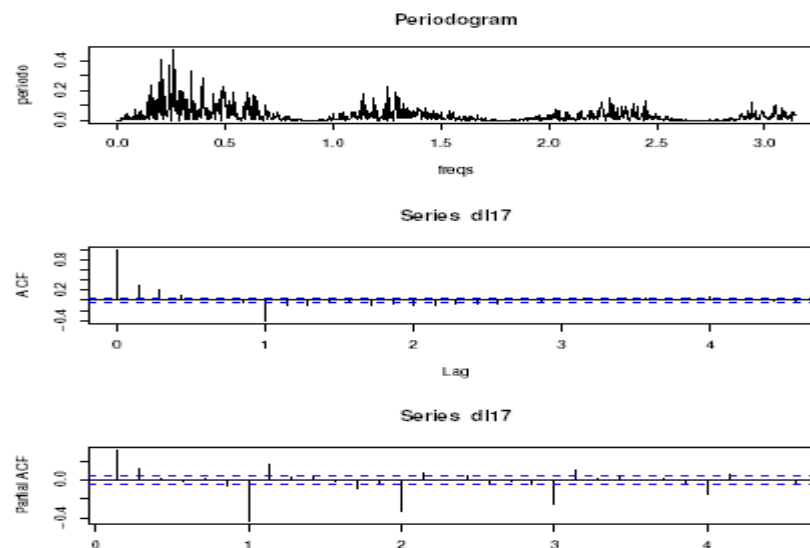
Test	Sample size	1%	2.5%	5%	10%
Neyman Pearson $c = 8.65$	1000	4.954	5.826	6.705	7.911
	200	4.756	5.459	6.300	7.417
	100	4.239	4.958	5.719	6.731
Student $c = 8.65$	1000	3.578	3.264	3.021	2.740
	200	3.502	3.181	2.956	2.690
	100	3.424	3.133	2.907	2.628
Fisher $c = 8.65$	1000	7.378	6.300	5.421	4.557
	200	7.471	6.324	5.493	4.592
	100	7.760	6.577	5.568	4.675

Proposition of a model : the specification

- We propose to specify the model of log prices as :

$$\log(P_t) = M_t + S_t + \epsilon_t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_t = N_t + M_{t-1} + \epsilon_t^M \\ N_t = N_{t-1} + \epsilon_t^N \\ (I + L^2 + L^3 + L^4 + L^5 + L^6)S_t = \epsilon_t^S \\ \epsilon_t \text{ is a gaussian white noise of variance } \sigma_{\epsilon}^2, \\ \epsilon_t^N \text{ is a gaussian white noise of variance } \sigma_N^2, \\ \epsilon_t^S \text{ is a gaussian white noise of variance } \sigma_S^2, \\ \epsilon_t^M \text{ is a gaussian white noise of variance } \sigma_M^2. \end{array} \right.$$



- $N(t)$ will capture trend and annually seasonality in a flexible way
- $M(t)$ capture the weekly seasonalities
- The residuals capture short-term uncertainty

Proposition of a model : Results

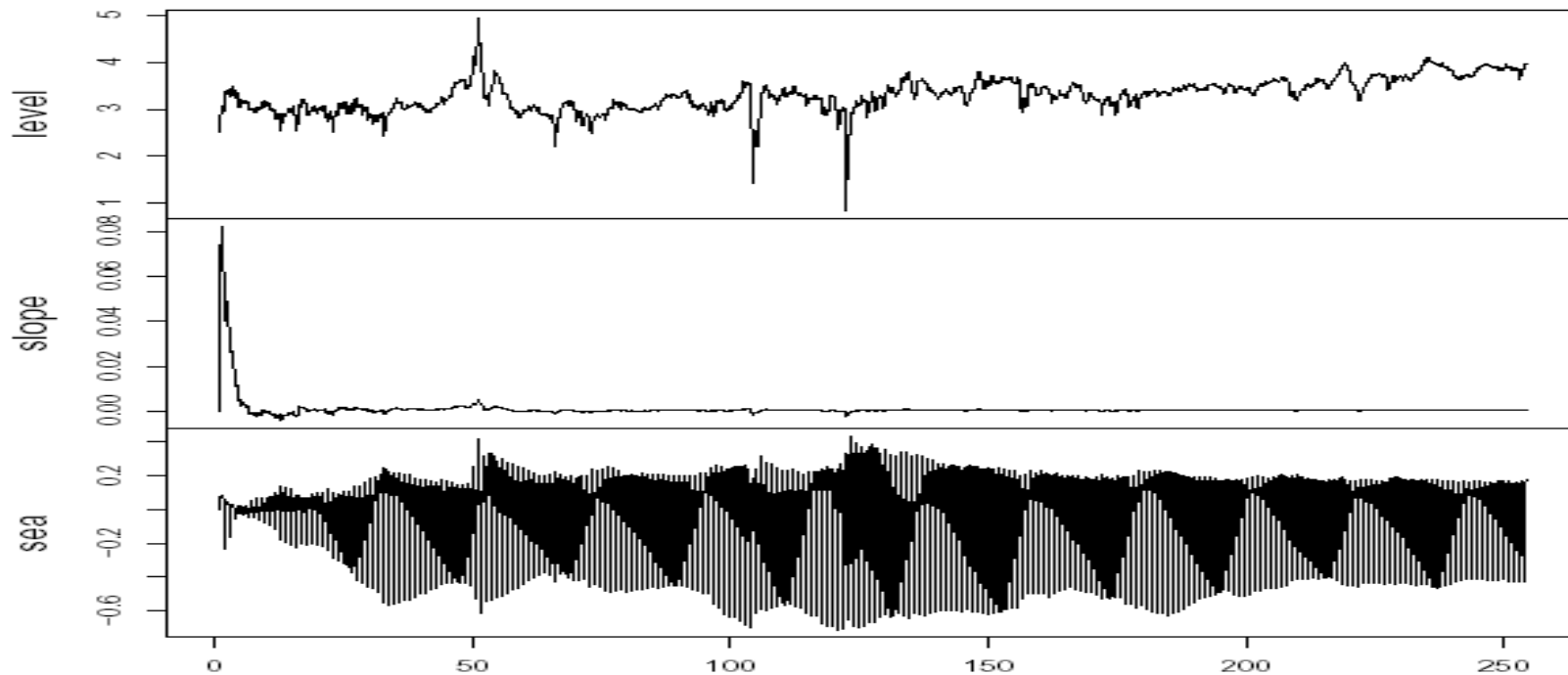
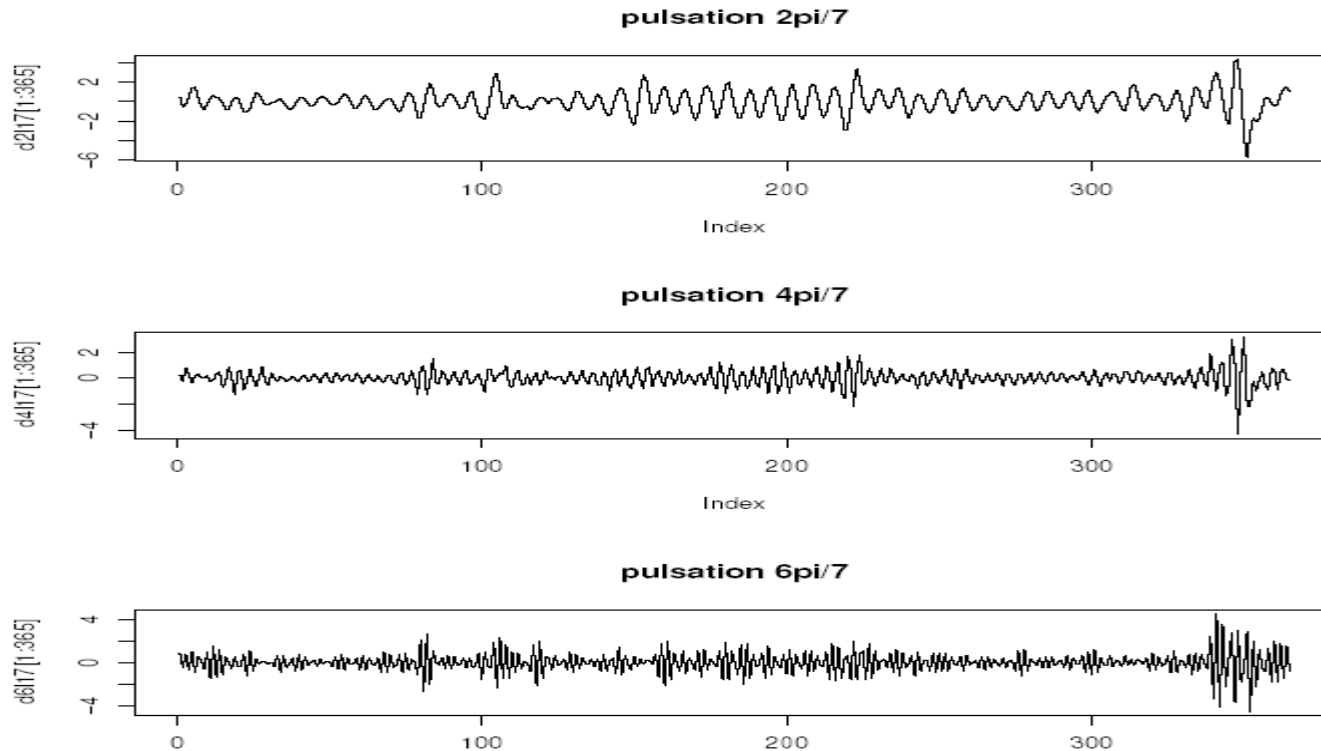


Illustration on the serie



• Ici sont représentées les valeurs sur la première année de la série des prix spots de la 17ème heure différenciée

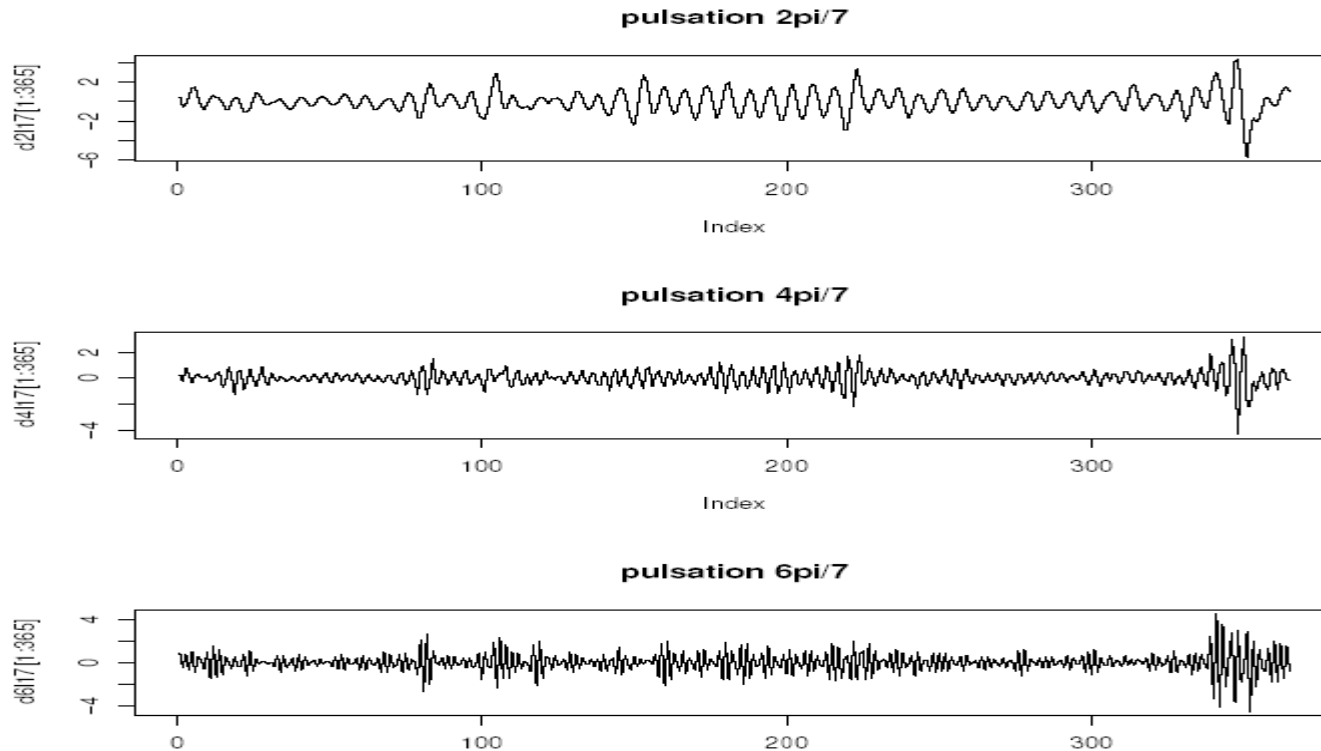
Result of test :problem of stability

constante	noyau		noyau	
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	1,19	<0,001	0,29	<0,001
4*pi/7	2,26	<0,001	0,18	<0,001
6*pi/7	1,42	<0,001	0,25	<0,001
0	7,39	accepte		
2001				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	0,39	<0,001	0,45	<0,001
4*pi/7	0,55	<0,001	0,53	<0,001
6*pi/7	0,52	<0,001	0,519	<0,001
0	7,99	accepte		
2002				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	0,65	<0,001	0,73	<0,001
4*pi/7	0,42	<0,001	0,49	<0,001
6*pi/7	0,532	<0,001	0,538	<0,001
0	3,76	accepte		
2003				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	0,61	<0,001	1,03	<0,001
4*pi/7	0,52	<0,001	0,49	<0,001
6*pi/7	1,98	<0,001	1,9	<0,001
0	14,59	accepte		
2004				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	1,11	<0,001	1,23	<0,001
4*pi/7	1,12	<0,001	1,1	<0,001
6*pi/7	0,43	<0,001	0,42	<0,001
0	4,84	accepte		
2005				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	0,49	<0,001	0,54	<0,001
4*pi/7	0,47	<0,001	0,48	<0,001
6*pi/7	0,73	<0,001	0,46	<0,001
0	17,61	accepte		

tendance	noyau		noyau	
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	2,32	<0,001	2,29	<0,001
4*pi/7	2,26	<0,001	0,18	<0,001
6*pi/7	1,42	<0,001	0,25	<0,001
0	3,73	refuse		
2001				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	1,96	<0,001	2,29	<0,001
4*pi/7	2,42	<0,001	2,33	<0,001
6*pi/7	2,32	<0,001	2,29	<0,001
0	14,42	accepte		
2002				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	3,59	accepte	3,22	accepte
4*pi/7	1,88	<0,001	2,2	<0,001
6*pi/7	2,22	<0,001	2,25	<0,001
0	5,72	accepte		
2003				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	2,72	<0,001	4,59	accepte
4*pi/7	2,23	<0,001	2,11	<0,001
6*pi/7	8,46	accepte	8,12	accepte
0	17,02	accepte		
2004				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	4,99	accepte	5,51	accepte
4*pi/7	4,86	accepte	4,76	accepte
6*pi/7	2,16	<0,001	2,1	<0,001
0	13,09	accepte		
2005				
fréquence	Bartlett	Décision	Parzen	Décision
2*pi/7	2,41	<0,001	2,7	<0,001
4*pi/7	2,36	<0,001	2,41	<0,001
6*pi/7	3,29	accepte	2,08	<0,001
0	8,66	accepte		

Table 2: tendance

Illustration on the serie



• Ici sont représentées les valeurs sur la première année de la série des prix spots de la 17ème heure différenciée