Jeux à champs moyen et isolation thermique des ménages

Aimé Lachapelle et Jean-Michel Lasry

Université Paris-Dauphine, CEREMADE

26 mars 2008

FiME LABORATOIRE COMMUN DAUPHINE CREST EDF

Chaire Finance & Développement Durable

Introduction

- problème: décrire les choix d'une population en matière d'isolation

- boite à outils: "Jeux à champs moyen" (équilibre de Nash avec un continuum de joueurs)

- trouver numériquement des équilibres dynamiques pour ce modèle

Objectifs

- faire un modèle stylisé de l'arbitrage isolation/non-isolation avec économie d'échelle croissante, décrivant une possibilité de transition technologique

- développer une méthode numérique

- simulations

Références - Jeux à champs moyen

• J.-M. Lasry and P.-L. Lions, Jeux à champ moyen. I. Le cas stationnaire. (French), *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 343 (9), 2006, pp 619-625.

• J.-M. Lasry and P.-L. Lions, Jeux à champ moyen. II. Horizon fini et contrôle optimal. (French), *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* , vol. 343 (10), 2006, pp 679-684.

• J.-M. Lasry and P.-L. Lions, Mean field games, *Jpn. J. Math.*, vol. 2 (1), 2007, pp 229-260.

Références - Calcul numérique

• Y. Maday, J. Salomon and G. Turinici, Monotonic time-discretized schemes in quantum control, *Num. Math*, vol. 103 (2), 2006, pp 323-338.

• G. Carlier and J. Salomon, A monotonic algorithm for the optimal control of the Fokker-Planck equation, *soumis*, 2008.

• A. Lachapelle, Jeux à champ moyen, simulation numérique et application à un modèle de choix technologiques, *Mémoire de Master 2*, Université Paris-Dauphine, EDDIMO, 2007.

Le modèle - cadre général

On se place dans le cadre:

- d'un marché avec un continuum d'agents consommateurs

- d'une période $[0, T]$

- où chaque agent possède un unique logement et ne peut en changer avant la date T

Le modèle - les agents

- arbitrage entre isolation et chauffage
  un joueur (ou agent) générique $\leftrightarrow$ un niveau d'isolation

- le niveau d'isolation initial x est un élément du segment $[0, 1]$
  ($x = 0$: aucune isolation, $x = 1$: isolation maximale)

- processus controlé d'un agent: $dX_t = \alpha_t dt + \sigma dW_t$
  où α est le contrôle (effort d'isolation), σ paramètre du modèle

- on imposera $0 \leq \alpha \leq C$ ou $|\alpha| \leq C$, avec $C > 0$ constante

- on connait la densité initiale des agents: X_0 de loi $m_0(dx)$

Le modèle - les coûts

Chaque agent de l'économie résout un problème de minimisation faisant intervenir les termes suivants:

- *Coût d'acquisition de l'isolant:* $h(\alpha) := \frac{\alpha^2}{2}$
- *Coût de maintenance de l'isolant:* $g(t, x, m) := \frac{c_0 x}{c_1 + c_2 m}$
- *Coût du chauffage:* $f(t, x) := p(t)(1 - 0,8x)$ avec $p(t)$ le coût "unitaire" du chauffage

Ici $m(t, x)$ est la distribution des agents à l'instant t

Le modèle - le coût de maintenance de l'isolant

- $g(t, x, m) := \frac{c_0 x}{c_1 + c_2 m(t,x)}$

- croissant en x

- décroissant en $m \leftrightarrow$ économie d'échelle croissante
  Les agents sont incités à faire les mêmes choix, à rester groupés.

Le modèle - le problème de minimisation

Le problème de minisation est:

$$\begin{cases} \inf\limits_{\alpha \text{ adm}} \mathbb{E}\left[\int_0^T h(\alpha(t, X_t^x)) + f(t, X_t^x) + g(t, X_t, m(t, X_t^x))dt\right] \\ dX_t = \alpha_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

qui peut se réécrire:

$$\begin{cases} \inf\limits_{\alpha \text{ adm}} \int_0^T \int_0^1 \left[\frac{\alpha(t,x)^2}{2} + f(t,x) + g(t,x,m(t,x))\right] m(t,x)dxdt \\ \partial_t m - \frac{\sigma^2}{2}\Delta m + \text{div}(\alpha m) = 0 \ , \ m(0,.) = m_0(.) \end{cases}$$

Le modèle - quelques remarques

- les agents sont rationnels

- anticipations rationnelles $\rightarrow$ chaque agent prend la densité globale m comme donnée pour tout instant t

- dans la seconde formulation, la contrainte linéaire correspond à l'équation de Fokker-Planck contrôlée

- on s'est replacé dans le cadre des jeux à champs moyen

Le modèle - Equilibre de champs moyen

- La théorie des jeux à champs moyen indique qu'un équilibre de champs moyen (équilibre de Nash avec un continuum de joueurs) correspond à une solution du système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t m - \nu\Delta m + \mathrm{div}(\alpha m) = 0 \ , \ m|_{t=0} = m_0 \\ \nabla v = \alpha \\ \partial_t v + \nu\Delta v + \frac{|\nabla v.\nabla v|}{2} = \phi'(m) \ , \ v|_{t=T} = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

- $\phi(m) := \int_0^1 \left(p(t)(1-0,8x) + \frac{c_0 x}{c_1+c_2 m(t,x)}\right) m(t,x)dx$ est la fonction de coût agrégée et $\nu := \frac{\sigma^2}{2}$

- couplage de 2 EDPs directe-rétrograde (difficultés numériques)

Le modèle - défauts

- stylisé du point de vue "industriel"
- il n'est pas réaliste (prix du chauffage, maintenance...)
- et il ne repose pas sur des données

Le modèle - qualités

- effet de transition (temps continu, espace continu)
- agent atomisé (son action n'a qu'une très faible influence sur la densité globale, approche micro-macro)
- notion d'équilibre non-coopératif avec anticipations rationnelles
- effet d'échelle

Simulations numériques (avec G. Turinici et J. Salomon)

- Notons $J(\alpha) = \int_0^T \int_0^1 \left[\frac{\alpha(t,x)^2}{2} + f(t,x) + g(t,x,m)\right] m(t,x) dx dt$

- Cas d'une fonctionnelle concave par rapport à l'état m et d'une contrainte linéaire (équation d'évolution de Fokker-Planck) $\rightarrow$ interdit toute une classe de méthodes de gradient

- on utilise un algorithme de type "schéma monotone" (cf. références)

Simulations numériques - Schéma monotone

- On cherche une factorisation:

$$J(\alpha^{k+1}) - J(\alpha^k) \leq \int_0^T \int_0^1 (\alpha^{k+1} - \alpha^k) H(\alpha^{k+1}, \alpha^k)$$

- Le schéma monotone permet de choisir α^{k+1} tel que:

$$(\alpha^{k+1} - \alpha^k) H(\alpha^{k+1}, \alpha^k) \leq 0$$

- problème: si m devient numériquement négatif, le schéma monotone explose: $\rightarrow$ faire attention à la discrétisation de l'équation:

$$\partial_t m - \nu \Delta m + \mathrm{div}(\alpha m) = 0$$

Simulations numériques - Schéma de Godunov

- certains schémas d'ordre très précis peuvent ne pas satisfaire la condition $m_j^i > 0$ pour tout i, j

- On a pris un schéma de type Godunov :

$$m_j^{i+1} = m_j^i + \nu \frac{dt}{dx^2}(m_{j+1}^i - 2m_j^i + m_{j-1}^i) - \frac{dt}{dx}(m_{j+\frac{1}{2}}^i \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - m_{j-\frac{1}{2}}^i \alpha_{j-\frac{1}{2}}^i)$$

- une fois fixé ce schéma, on en obtient un automatiquement pour l'équation sur l'adjoint

Quelques résultats numériques

- rappel des coûts:
  - · chauffage: $\longrightarrow f(t,x) = p(t)(1-0,8x)$
  - · isolation: $\longrightarrow g(t,x,m) = \frac{x}{0.1+m(t,x)}$

- *1er exemple*: choix groupés avec $p(t)$ constant

- *2d exemple*: extrême sensibilité à un paramètre avec $p(t)$ non constant

Quelques résultats numériques - Premier cas

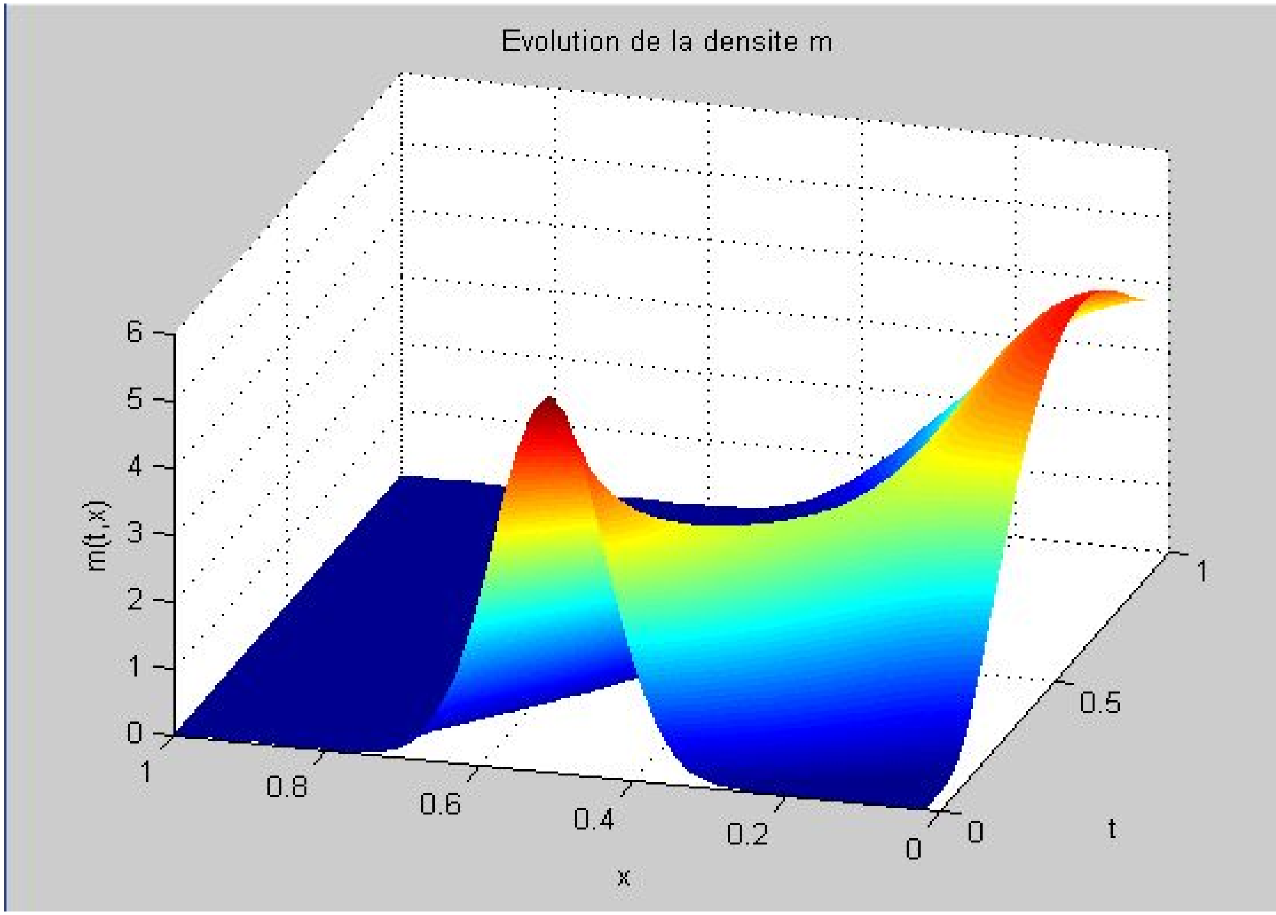
- La contrainte sur le contrôle est : $sup_{t,x} |\alpha(t,x)| \leq C = 10$

- la répartition initiale des agents est une gaussienne centrée en $\frac{1}{2}$

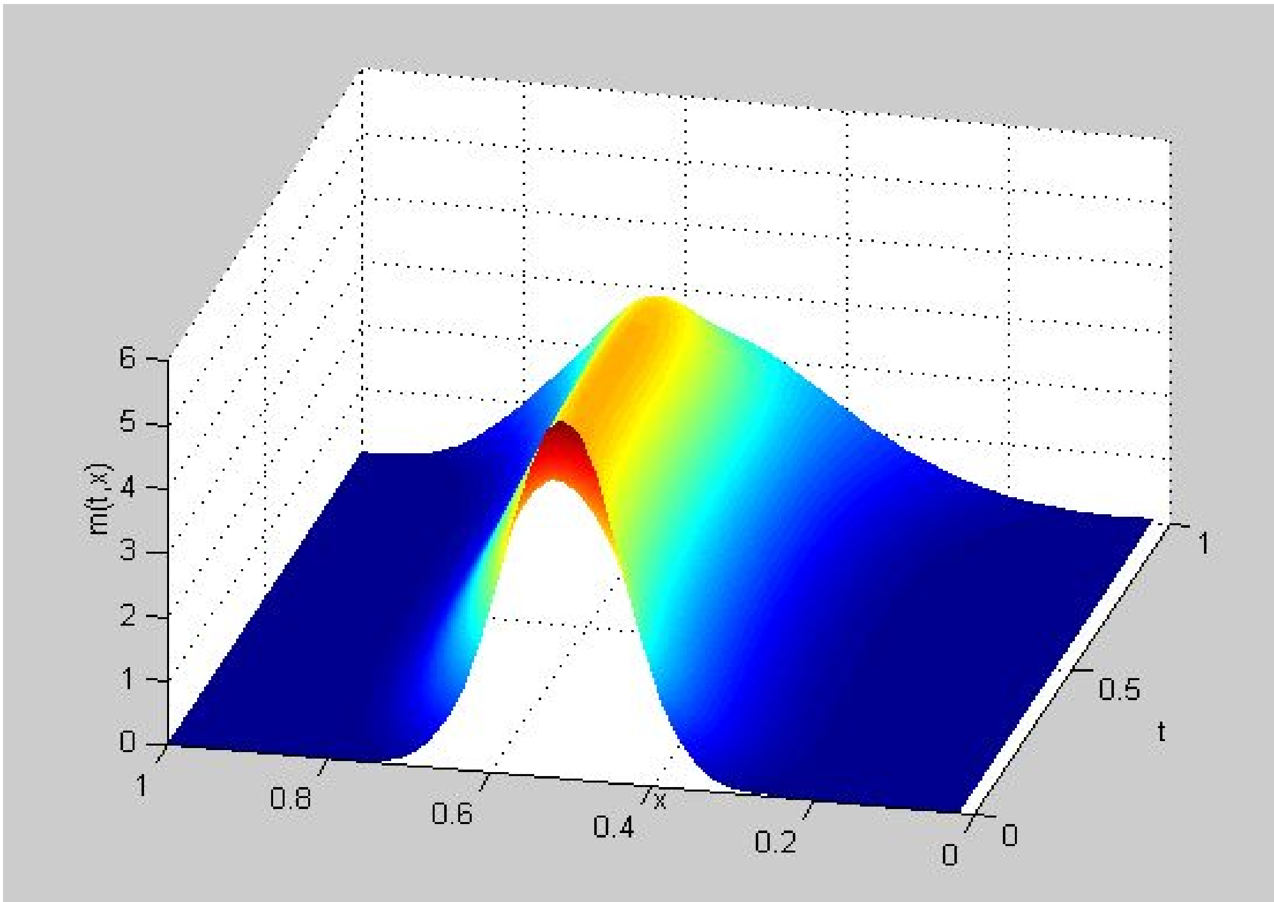
- l'horizon et le bruit choisis sont respectivement $T = 1$ et $\nu = 0.07$

- le prix est constant (dans les trois figures suivantes, successivement $p(t) \equiv 0$, 3.2 et 10)

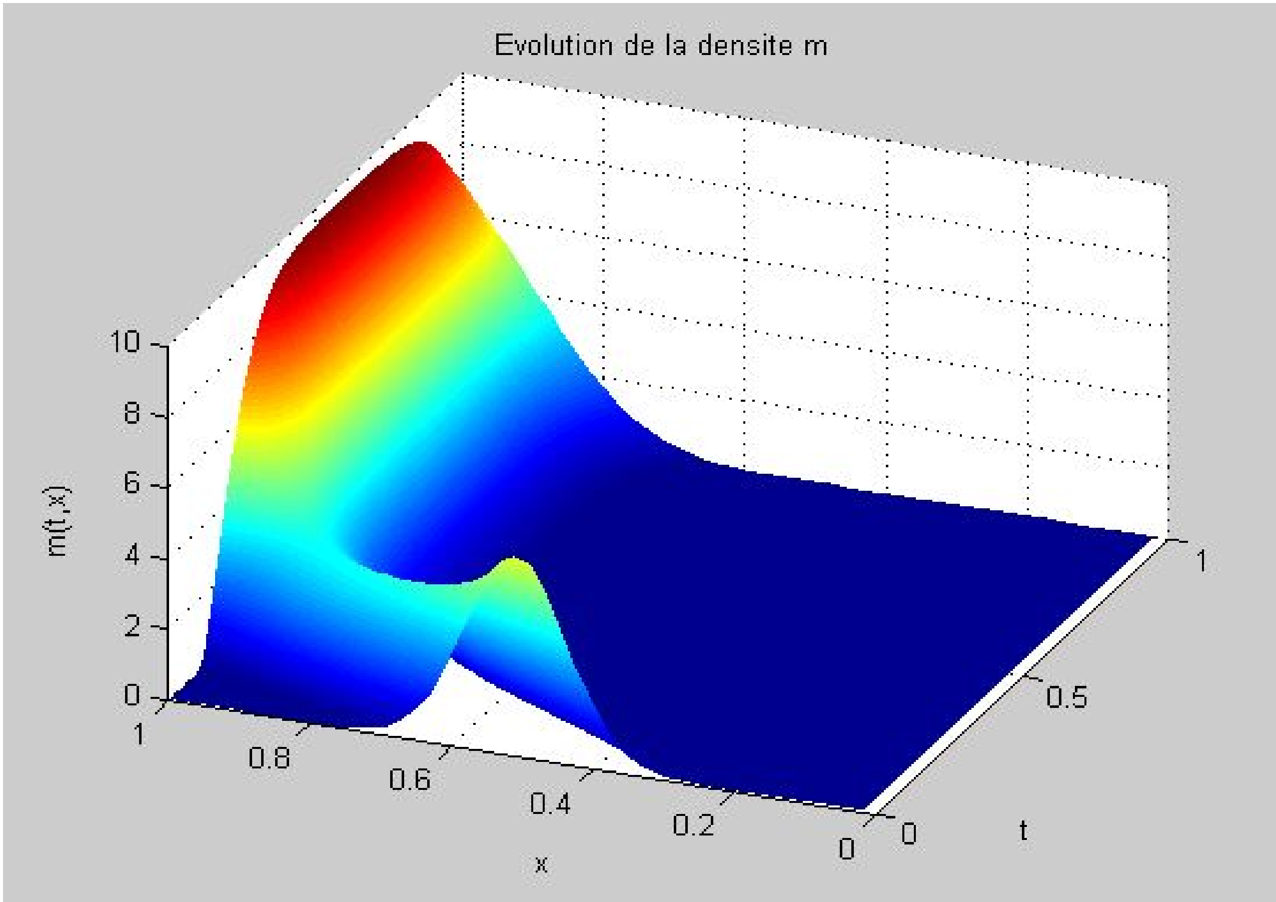
Quelques résultats numériques - $p(t) \equiv 0$



Quelques résultats numériques - $p(t) \equiv 3.2$



Quelques résultats numériques - $p(t) \equiv 10$



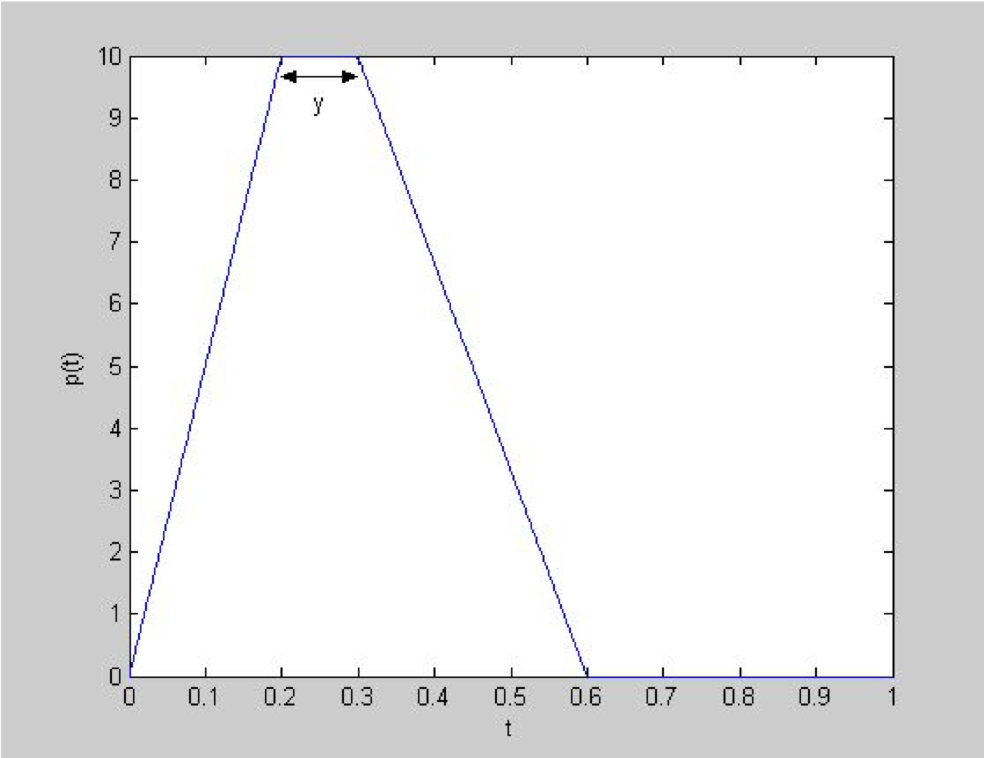
Quelques résultats numériques - Second cas

- Cette fois-ci on modifie l'ensemble des contrôles admissibles: $0 \leq \alpha(t,x) \leq C = 10$ $\longrightarrow$ correspond à l'irréversibilité dans l'investissement en isolant

- la répartition initiale des agents est une gaussienne centrée en 0.25 (*i.e* agents peu équipés en isolant)

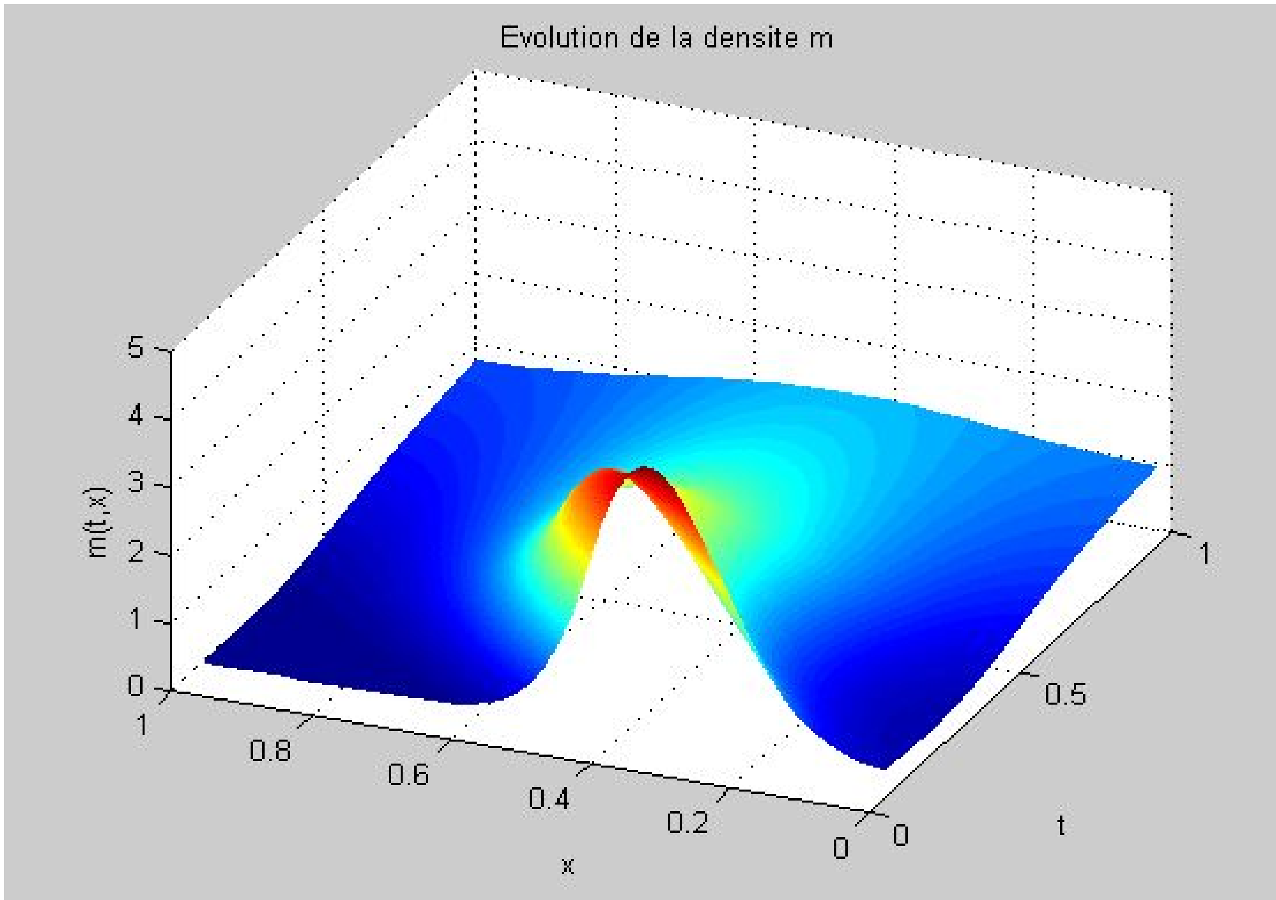
- le prix du chauffage n'est plus constant

Quelques résultats numériques - $p(t)$

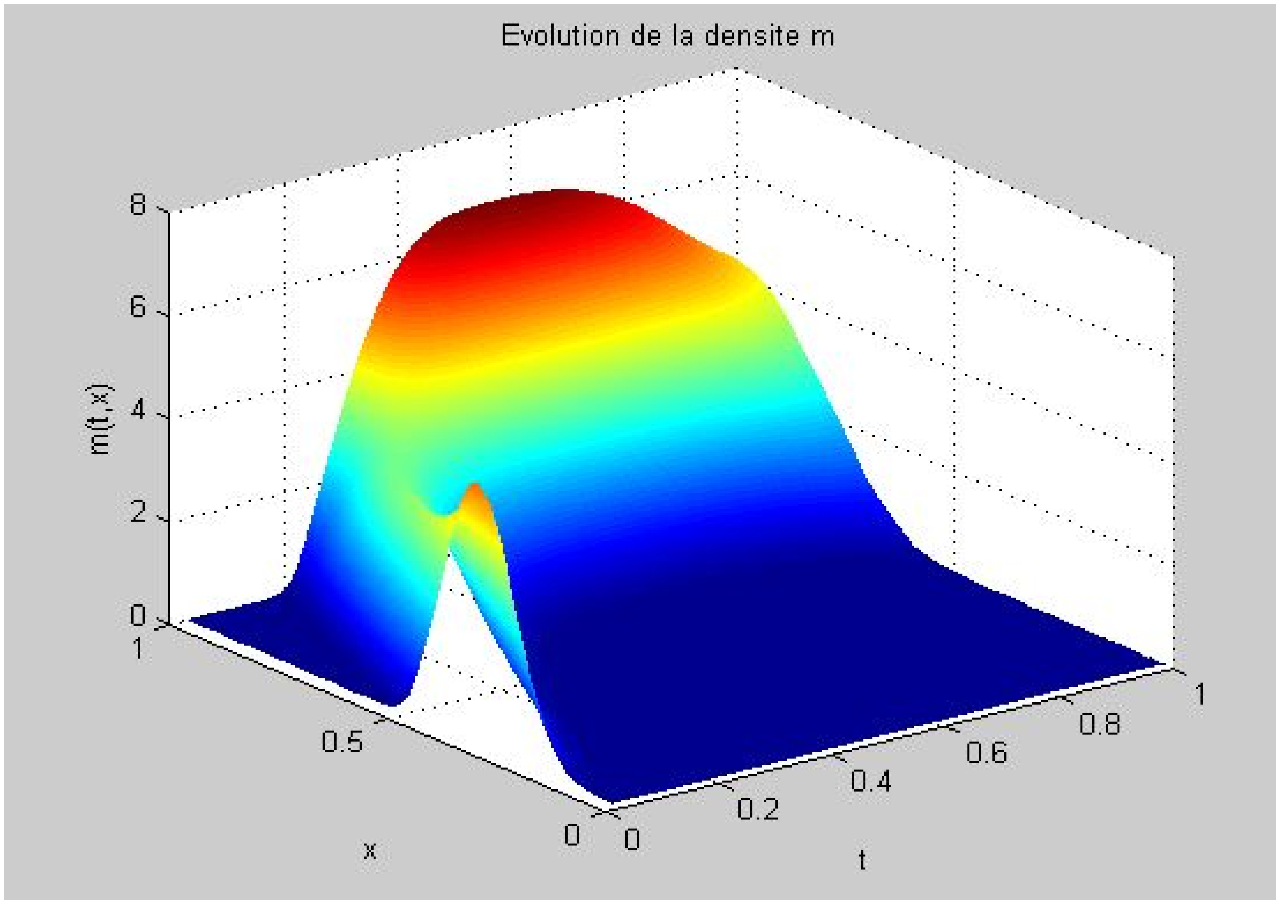


On va faire très sensiblement varier la valeur de y (± 0.001) et obtenir deux solutions bien différentes

Quelques résultats numériques - $y = 0.030$



Quelques résultats numériques - $y = 0.035$



Conclusions et perspectives

- modèle dynamique (temps continu) avec une infinité d'agents
- équilibres de champs moyen (Nash, anticipations rationnelles) en économie d'échelle croissante
- développement d'un outil numérique de résolution des systèmes de champs moyen
- observations numériques de déplacements en groupe (intérêt de faire les choix que les autres font) et d'une grande sensibilité des solutions par rapport à un paramètre
- perspectives principales: trouver numériquement plusieurs équilibres et calibration

MERCI !