

Jeux à champs moyens

Jean-Michel Lasry Pierre-Louis Lions

Chaire Finance et Développement Durable

26 mars 2008

Plan

- Introduction
- Croissance, capital humain, compétition et distributions de Pareto
- MFG: un cadre général de type EDP
- Un exemple de type EDO: rendements croissants et transitions technologiques

Plan

- **Introduction**
- Croissance, capital humain, compétition et distributions de Pareto
- MFG: un cadre général de type EDP
- Un exemple de type EDO: rendements croissants et transitions technologiques

Quoi ?

- Une boîte à outils
- Des techniques de modélisation nouvelles
- Des équilibres de Nash avec une infinité d'agents
- Des modèles d'équilibre avec externalités

Pourquoi ?

- Parce que l'hypothèse d'atomicité des agents:
 - Est généralement vérifiée
 - Écarte l'explosion combinatoire
- Pour modéliser les externalités
 - Dans un contexte d'anticipations rationnelles
 - Dans un cadre dynamique
- Pour étudier les transitions
 - en temps continu

Comment ?

- Systèmes backward/forward couplés
- Calcul backward de la valeur pour traduire
 - les anticipations rationnelles
 - La capacité d'optimisation de chaque agent
- Calcul forward de la dynamique de la population
- Couplage pour assurer la cohérence:
 - Les agents anticipent la dynamique de la population
 - La dynamique collective est le résultat des comportements individuels

Qui, quand, où ?

- Vaste chantier
- Grand potentiel diversifié de modélisation
- Éco industrielle, rendements croissants
- Congestion, dynamiques spatiales
- ..voir exemples
- Beaucoup de questions pour les mathématiciens

Plan

- Introduction
- **Croissance, capital humain, compétition et distributions de Pareto**
- MFG: un cadre général de type EDP
- Un exemple de type EDO: rendements croissants et transitions technologiques

Croissance, capital humain,
compétition et distributions de
Pareto

Olivier Guéant, Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions

L'optimisation individuelle des agents (1/3)

Le salaire individuel est

-micro-fondé sur une fonction de production

-dans un cadre de compétition entre individus de même qualification q

- $m(t,q)$ est la densité d'individus de qualification q au temps t

- m est supposée connue et anticipée par les agents

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

L'optimisation individuelle des agents (2/3)

Le coût individuel pour augmenter la qualification est d'autant plus grand que qualification acquise est élevée et plus précisément: que la quantité $F(t,q)$ d'agents plus qualifiés est petite

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

L'optimisation individuelle des agents (3/3)

Le programme de chaque agent est donc

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Où la densité m est une anticipation rationnelle partagée de tous les agents: la solution de ce programme doit donc en retour justifier la dynamique de m

Les équations du problème (1/2)

- Il y a deux EDP:
- -une EDP de type Hamilton-Jacobi-Bellman qui fournit la solution du problème d'optimisation individuelle pour un comportement donné m de la population
- -une EDP de type Kolmogorof qui fournit la dynamique m de la population pour des comportements individuels donnés

Les équations du problème (2/2)

HJB

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Kolmogorof

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Spécification de G et H

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

L'optimisation individuelle des agents

Avec cette spécification le programme de chaque agent est maintenant

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Et lorsque la solution J est connue,
la solution optimale a est donnée en fonction de J par

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Résolution (1/3)

Si la distribution initiale est de type Pareto

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

La solution optimale est pour tous les individus
quelque soit leur qualification initiale
d'assurer une croissance à taux constant de leur capital humain

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Résolution (2/3)

Ce comportement optimal individuel
crée, et est créé,
par une dynamique globale de la population qui conserve la
structure de Pareto:

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Résolution (3/3)

- Chaque agent doit en effet améliorer sa qualification
- -pour progresser par rapport à la situation existante
- -pour faire face aux conséquences du progrès général
- Ce faisant chaque agent contribue à la croissance générale des qualifications, tout comme les autres agents: il le sait et l'anticipe.

Croissance, compétition et inégalités

- Ainsi se construit une compétition anticipée par tous qui induit un taux de croissance qui n'existerait pas sans cette anticipation
- La croissance dans ce modèle est d'autant plus forte que la distribution de Pareto initiale est inégalitaire

La distributions des revenus est de type Pareto:

$1/w^p$, avec p voisin de 2

en accord avec les données expérimentales

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Plan

- Introduction
- Croissance, capital humain, compétition et distributions de Pareto
- **MFG: un cadre général de type EDP**
- Un exemple de type EDO: rendements croissants et transitions technologiques

Mean Field Games/ Jeux à champ moyen

- Chaque agent optimise un problème de contrôle stochastique (ou déterministe) dont les coûts/bénéfices dépendent de la dynamique de la population des autres agents
- Il y a un continuum d'agents: un agent individuel ne peut pas déplacer l'équilibre
- L'équilibre est de type Nash, anticipations rationnelles: la dynamique de la population doit être rationalisée par les choix non coopératifs des agents

formalisation

- $dX^i = a(t, X^i) dt + b(t, X^i) dW^i$
- $\text{Max } E_i \int F_i(t, X^i, a_i, b^i, m) dt$
- $m(t, x)$ est la densité d'agents dans l'état x , à la date t
- Cas particulier important: $F_i = F$ et W^i indépendants

formalisation

- $F(t,x,a,b,m) = H^*(x,a) + V_0(x,m)$
- Optimisation individuelle: Equation HJB rétrograde
- Dynamique collective: Kolmogorof intégrant les stratégies individuelles, propagation de la densité

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

Principales caractéristiques du système d'équations MFG

- Incorpore de nombreuses caractéristiques des équilibres de Nash
- -équilibre non coopératif
- -multiplicité éventuelle des équilibres
- -unicité et efficacité de l'équilibre sous conditions
- -perte de la monotonie par rapport aux coûts

Principales caractéristiques du système d'équations MFG

- Interprétation comme limite d'un jeu à N joueurs
- Pas d'explosion combinatoire grâce aux limitations stratégiques: les stratégies individuelles ne dépendent que des statistiques de la population
- calculabilité

Principales caractéristiques du système d'équations MFG

- Capacité expressive extrêmement étendue
- Bénéfice des double interprétations fréquentes
- Vaste chantier
- En particulier: déblaiement en cours pour le traitement des aléas corrélés

Principales caractéristiques du système d'équations MFG

- Principe variationnel

QuickTime™ et un décompresseur TIFF (LZW) sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un décompresseur TIFF (LZW) sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un décompresseur TIFF (LZW) sont requis pour visionner cette image.

Plan

- Introduction
- Croissance, capital humain, compétition et distributions de Pareto
- MFG: un cadre général de type EDP
- **Un exemple de type EDO: rendements croissants et transitions technologiques**

Autre exemple: rendements croissants et transitions technologiques

- Deux états: 0 et 1
- $-du_i/dt = \max(a_i (u_{1-i} - u_i) + f_i(a)) + g_i(u_i, m_i)$
- $dm_i/dt = a^*_{1-i} m_{1-i} - a_i m_i$
- Où f est le coût pour augmenter la probabilité de changement d'état
- Rendements d'échelle: $g_i(u_i, m_i) = m_i^2$
- Résultat: deux équilibres, modèle pour les transitions

annexe

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.

décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image

décompresseur TIFF (LZW)
sont requis pour visionner cette image.