Méthodes de Monte Carlo pour les EDP non linéaires

Nizar TOUZI

Ecole Polytechnique Paris

1er avril 2009

Outline

1. Présentation de la méthode de Monte Carlo
2. Représentation probabiliste de solutions d'EDP linéaires
3. EDS rétrogrades
   - Principe du Maximum de Pontryagin Stochastique
   - Markov Backward SDEs

Loi des Grands Nombres

$X_1, \ldots, X_n, \ldots \sim$ iid $\mu(dx)$
f une fonction $\mu-$intégrable. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)\mu(dx) \quad \mu - \text{p.s.}$$

• En statistique : les X_i sont des observations, et on cherche à estimer le paramètre inconnu $\mathbb{E}[f(X)]$
• Approximation numérique : on simule les X_i (ou une approximation)

Méthode de Monte Carlo : simulation de $(X_n)_{n\geq 1}$, puis approximation d'une quantité d'intérêt à partir de l'échantillon simulé

Théorème de limite centrale

On note $\varepsilon_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \mathbb{E}[f(X)]$

Si de plus f^2 est $\mu-$intégrable, alors

$$\sqrt{n}\varepsilon_n(f) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(f)\right) \quad \text{en loi, où} \quad \sigma^2(f) = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathrm{f}(\mathrm{X})]$$

En particulier :

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\sqrt{n}\varepsilon_n(f)}{\sigma(f)} \in [-u_\alpha, u_\alpha]\right\} \quad \longrightarrow \quad 1-\alpha$$

u_α étant le quantile $\alpha/2$ de la $\mathcal{N}(0,1)$
$\Longrightarrow$ Intervalle de confiance
$\Longrightarrow$ Précision de la méthode de MC caractérisée par $\sigma(f)$

Exemples

- $U_i, i \geq 1 \sim$ iid $\mathcal{U}([0,1])$, $X_i := \mathbb{1}_{\{f(U_i) \geq \lambda\}}$

$$\hat{p}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow p := \mathbb{P}\{f(U_i) \geq \lambda\} \quad \text{p.s.}$$
$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \longrightarrow \mathcal{N}(0, p(1-p)) \quad \text{en loi}$$

Si on veut $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{p\sqrt{n}} \leq 10^{-2}$, il faut choisir $n \geq 10^2 \sqrt{\frac{1-p}{p}}$...

- $\theta = \mathbb{E}\left[e^{\beta N}\right]$ où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors

$$\theta = e^{\frac{\beta^2}{2}} \quad \text{et} \quad \sigma^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\mathrm{e}^{\beta \mathrm{N}}\right] = \mathrm{e}^{2\beta^2} - \mathrm{e}^{\beta^2}$$

Si on veut $\frac{\sigma}{\theta\sqrt{n}} \leq 10^{-2}$, il faut choisir $n \geq 10^4 \left(e^{\beta^2} - 1\right)$...
Pour $\beta = 5$... $n \geq 7 \times 10^{12}$! !

Loi du logarithme itéré

$X_1, \ldots, X_n, \ldots \sim$ iid $\mu(dx)$, f une fonction $\mu-$intégrable
On rappelle

$$\varepsilon_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \mathbb{E}[f(X)] \quad \text{et} \quad \sigma^2(f) = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathrm{f}(\mathrm{X})]$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2\ln\ln n}}\,\frac{\varepsilon_n(f)}{\sigma(f)} \quad = \quad 1$$

L'erreur est en moyenne de l'ordre de $\sqrt{n}$ (TCL), et est au pire de l'ordre de $\sqrt{\frac{2\ln\ln n}{n}}$

Lien avec l'approximation numérique de l'intégrale

On veut calculer $\int_{[0,1]^d} f(x)dx_1 \ldots dx_d$

En dimension 1 (pour simplifier), on approxime par des formules du type :

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i f(x_i), \quad \pi_i \geq 0, \ \sum_i \pi_i = 1 \quad \text{et } x_i \in [0,1]$$

$\longrightarrow x_i = \frac{1}{n}$ et $\pi_0 = \pi_n = \frac{1}{2n}$, $\pi_i = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq i \leq n-1 \Longrightarrow$ convergenc en $\frac{1}{n}$ et même mieux si f est régulière...

$\longrightarrow \pi_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i = 0, \ldots, n$ et x_i tirés au hasard dans $\mathcal{U}([0,1]) \Longrightarrow$ convergenc en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, indépendamment de la dimension et de la régularité de f

Réduction de variance

Idée générale : trouver une autre représentation

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$$

telle que $\mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathrm{Y}] \leq \mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathrm{X}]$...

Exemples :

- Echantillonnage préférentiel
- Variables de contrôle
- Variables antithétiques

Outline

1. Présentation de la méthode de Monte Carlo
2. Représentation probabiliste de solutions d'EDP linéaires
3. EDS rétrogrades
   - Principe du Maximum de Pontryagin Stochastique
   - Markov Backward SDEs

Mouvement brownien

$W : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est un mouvement brownien si

- $W_0 = 0$ et $W(., \omega)$ continu p.s.
- W est à accroissements indépendants et $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

W est à variation infinie et à variation quadratique donnée par

$$\sum_{t_i \le t} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 \quad \longrightarrow \quad t \text{ en proba quand } \sup_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$$

Conséquence directe : pour une fonction f régulière :

$$f(t, W_t) = f(0, W_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)(s, W_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s) dW_s$$

Equation différentielle stochastique

W mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$
Soient $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ des fonctions Lipschitz en x uniformément en t et à croissance linéaire. Alors l'équation différentielle stochastique

$$dX_t \quad = \quad b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

admet une unique solution Markovienne telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]} |X_t|^2\right] \quad \leq \quad C\left(\mathbb{E}[|X_0|^2] + e^{CT}\right)$$

Formule d'Itô :

$$f(t, X_t) \quad = \quad f(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + b \cdot Df + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\sigma\sigma^{\mathrm{T}} D^2 f\right]\right)(s, X_s)ds$$
$$+ \int_0^t Df(s, X_s) \cdot \sigma(s, X_s)dW_s$$

Formule de Feynman-Kac

On note

$$\mathcal{L}v(t,x) \quad := \quad b(t,x)\cdot Dv(t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[(\sigma\sigma^T)(t,x)D^2v(t,x)\right]$$

et on considère le problème de Cauchy :

$$-\frac{\partial v}{\partial t} - \mathcal{L}v + kv - f = 0$$
$$v(T,x) = g(x)$$

S'il existe une solution régulière V à croissance polynomiale, alors

$$V(t,x) \quad = \quad \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^T e^{-\int_t^s k(r,X_r)dr} f(s,X_s)ds + g(X_T)e^{-\int_t^T k(r,X_r)dr}\right]$$

où, étant donné un mouvement brownien W, X est la solution de :

$$X_s \quad = \quad X_t + \int_t^s b(r,X_r)dr + \int_t^s \sigma(r,X_r)dW_r$$

Méthode de Monte Carlo pour les EDP linéaires

La représentation donnée par la formule de Feynman-Kac ouvre la porte aux méthodes numériques probabilistes... pour simplifier, on prend $f = k = 0$

• Discrétisation d'Euler de l'EDS avec $h := \frac{T-t}{n}$, $t_i := ih$, et $\Delta^h W_{t_i} := W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $i = 0, \ldots, n$

$$X_0^h = X_0 \quad \text{et} \quad X_{t_i}^h = X_{t_{i-1}}^h + b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^h)h + \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^h)\Delta^h W_{t_i}$$

On peut montrer que

$$\limsup_{h \to 0} h^{-1}\mathbb{E} \sup_{[0,T]} |X^h - X|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \limsup_{h \to 0} h^{-2}\mathbb{E}|X_1^h - X_1|^2 < \infty$$

• On simule des copies indépendantes de la discrétisation d'Euler $X^{h,j}$, $j = 1, \ldots, N$, et on calcule

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} g\left(X_{t_n}^h\right) \ldots \quad \text{LGN,} \quad \text{TCL...}$$

Problème de couverture en finance

• Marché financier contenant un actif sans risque $S^0 \equiv 1$, et un actif risqué de processus de prix

$$dS_t = \mathrm{diag}[S_t]\sigma_t dW_t$$

μ, σ adaptés, σ inversible $+\ldots$

• Portefeuille Z_t^i : montant investi dans l'actif i à la date t.

Condition d'autofinancement $\Longrightarrow$ dynamique de la valeur du portfeuille :

$$dY_t = Z_t \cdot \mathrm{diag}[S_t]^{-1} dS_t$$

Problème de surcouverture de la v.a. $G \geq 0$ $\mathcal{F}_T-$mesurable :

$$V_0 := \inf\{Y_0 : \; Y_T \geq G \text{ p.s. pour un certain } Z \in \mathcal{A}\}$$

Solution : le modèle de Black-Scholes

La valeur de sur-couverture est donnée par

$$V_0 \quad = \quad \mathbb{E}[G]$$

De plus, il existe un portefeuille optimal Z^* tel que

$$Y_T^{V_0,Z^*} = G \quad \text{replication parfaite}$$

• Si de plus $\mu_t = \mu(t, S_t)$, $\sigma_t = \sigma(t, S_t)$, $G = g(S_T)$, le prix de Black-Scholes $v(t, S_t) = V_t$ est caracterisé par l'EDP linéaire :

$$-Lv := -\frac{\partial v}{\partial t} - rs \cdot Dv - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\sigma\sigma^{\mathrm{T}} D^2 v\right] + rv = 0 \quad \text{and} \quad v(T,.) = g$$

Le problème d'option américaine : une première EDP non linéaire

Etant donné un processus de gain $\{G_t, t \in [0,T]\}$, on cherche

$$\bar{V}_0 \quad := \quad \inf\left\{Y_0 : \;\; Y_t \geq G_t, \;\; t \in [0,T] \text{ p.s. pour un ceratin } Z \in \mathcal{A}\right\}$$

Par un argument similaire, ce problème de sur-couverture se réduit au problème d'arrêt optimal :

$$\bar{V}_0 \quad := \quad \sup\left\{\mathbb{E}[G_\tau] : \tau \text{ temps d'arrêt} \leq T\right\}$$

• Si de plus $\mu_t = \mu(t, S_t)$, $\sigma_t = \sigma(t, S_t)$, $G_t = g(S_t)$, le prix de de l'option américaine $v(t, S_t) = V_t$ est caracterisé par l'EDP frontière libre :

$$\min\left\{-L\bar{v} \; ; \; \bar{v} - g\right\} = 0 \quad \text{and} \quad \bar{v}(T,.) = g$$

Méthodes numériques probabilistes pour les options américaines

Le prix d'une option américaine de payoff $\{G_t, t \geq 0\}$:

$$V_0 \quad = \quad \sup \left\{ \mathbb{E}\left[G_\tau\right] : \ \tau \text{ stopping time } \ \leq T \right\}$$

peut être approximé par l'enveloppe de Snell :

$$V_T^n := G_T \quad \text{et} \quad V_{t_k}^n := \max\left\{ G_{t_k}, \mathbb{E}\left[V_{t_{k+1}}^n | \mathcal{F}_{t_k} \right] \right\}$$

où $t_k := kT/n$, $k = 0, \ldots, n$
Dans le cas Markov, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left[\cdot|\mathcal{F}_{t_k}\right]$ est une regression, et peut être approximée une approximation implémentable $\hat{\mathbb{E}}_k^N[\cdot]$, ce qui conduit au schema implementable :

$$\hat{V}_T^{n,N} := G_T \quad \text{et} \quad \hat{V}_{t_k}^{n,N} := \max\left\{ G_{t_k}, \hat{\mathbb{E}}_k^N \left[\hat{V}_{t_{k+1}}^{n,N} \right] \right\}$$

Méthodes d'estimation de regression

Méthodes classiques en statistique :

- méthode des noyaux (suggérée dans le contexte des options US par Carrière)
- Projection sur des bases de $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ <Longstaff-Schwarz, Gobet-Lemor-Warin AAP05>

Méthodes numériques probabilistes

- Markov chain approximation <Kushner>
- Stochastic mesh <Broadie-Glasserman>
- quantification... <Bally-Pagès SPA03>

Integration par parties <Lions-Reigner 00, Bouchard-T. SPA04>

Outline

The Pontryagin approach for stochastic control

- On considère le problème de contrôle stochastique

$$v(t,x) := \sup_{\nu\in\mathcal{U}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^T f\left(r, X_r^{\nu}, \nu_r\right) dr + g\left(X_T^{\nu}\right)\right]$$

où X^ν est un processus détat contrôlé

$$dX_t^{\nu} = b\left(r, X_t^{\nu}, \nu_t\right) dt + \sigma\left(r, X_t^{\nu}, \nu_t\right) dW_t$$

- On définit le Hamiltonien :

$$H(t,x,u,y,z) := f(t,x,u) + b(t,x,u)\cdot y + \mathrm{Tr}\left[\sigma(tr,x,u)^T z\right]$$

- Pour tout contrôle ν, on introduit l'EDR rétrograde :

$$dY_t = -\nabla_x H\left(t, X_t, \nu_t, Y_t, Z_t\right) dt + Z_t \cdot dW_t \quad \text{with} \quad Y_T = \nabla g(X_T)$$

The Pontryagin Maximum Principle

- Soit $\hat{\nu} \in \mathcal{U}$ et $\hat{X} := X^{\hat{\nu}}$ l'état contrôlé correspondant, i.e.

$$d\hat{X}_t = \nabla_y H\left(t, \hat{X}_t, \hat{\nu}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t\right) dt + \nabla_z H\left(t, \hat{X}_t, \hat{\nu}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t\right) \cdot dW_t$$

où $\left(\hat{Y}, \hat{Z}\right)$ est une solution adaptée de l'EDS rétrograde (état adjoint) :

$$d\hat{Y}_t = -\nabla_x H\left(t, \hat{X}_t, \hat{\nu}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t\right) dt + \hat{Z}_t \cdot dW_t \quad \text{avec} \quad \hat{Y}_T = \nabla g(\hat{X}_T)$$

- On suppose de plus pour tout $t \in [0, T]$:

$$H\left(t, \hat{X}_t, \hat{\nu}_t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t\right) = \max_{u \in U} H\left(t, \hat{X}_t, u, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t\right)$$

- **Alors, sous des conditions de convexité, $\hat{\nu}$ est un contrôle optimal**
- Le triplet $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ est solution du systèmes d'EDS Forward-Backward

Preuve du principe du maximum de Pontryagin

- $f \equiv 0$ pour simplifier, $h(t,x,y,z) := \sup_{u\in U} H(t,x,u,y,z)$.
- **Hypothèse :** g et h concave en x Alors, pour $\nu \in \mathcal{U}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g\left(\hat{X}_T\right)\right] - \mathbb{E}\left[g\left(X_T^\nu\right)\right] &\geq \mathbb{E}\left[\left(\hat{X}_T - X_T^\nu\right)\cdot\nabla g\left(\hat{X}_T\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\hat{X}_T - X_T^\nu\right)\cdot\hat{Y}_T - \left(\hat{X}_0 - X_0^\nu\right)\cdot\hat{Y}_0\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T d\left\{\left(\hat{X}_t - X_t^\nu\right)\cdot\hat{Y}_t\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \Big[H\left(t,\hat{X}_t,\hat{\nu}_t,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t\right) - H\left(t,X_t^\nu,\nu_t,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t\right) \\
&\qquad - \left(\hat{X}_t - X_t^\nu\right)\cdot\nabla_x H\left(t,\hat{X}_t,\hat{\nu}_t,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t\right)\Big]\,dt \\
&\geq \mathbb{E}\int_0^T \Big[h\left(t,\hat{X}_t,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t\right) - h\left(t,X_t^\nu,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t\right) \\
&\qquad - \left(\hat{X}_t - X_t^\nu\right)\cdot\nabla_x h\left(t,\hat{X}_t,\hat{Y}_t,\hat{Z}_t\right)\Big]\,dt \;\geq\; 0
\end{aligned}
$$

Definition (Pardoux and Peng)

Given $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$, $t \geq 0$, find an $\mathbb{F}^W-$**adapted** (Y, Z) satisfying :

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r \cdot dW_r$$

i.e. $\quad dY_t = -f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + Z_t \cdot dW_t$ and $Y_T = g(X_T)$

where the generator $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ is Lipschitz in (x, y, z) uniformly in t, and $g(X_T) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P})$. Then there is a unique solution satisfying

$$\mathbb{E} \sup_{t \leq T} |Y_t|^2 + \mathbb{E} \int_0^T |Z_t|^2 dt < \infty$$

Moreover, there exists a measurable function V :

$$Y_t = V(t, X_t), \qquad 0 \leq t \leq T$$

Connection with PDE's

- By definition,

$$\begin{aligned} Y_{t+h} - Y_t &= V(t+h, X_{t+h}) - V(t, X_t) \\ &= -\int_t^{t+h} f(X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^{t+h} Z_r \cdot \sigma(X_r)dW_r \end{aligned}$$

- If $V(t,x)$ is smooth, it follows from Itô's formula that :

$$\int_t^{t+h} \mathcal{L}V(r, X_r)dr + \int_t^{t+h} DV(r, X_r) \cdot \sigma(X_r)dW_r$$
$$= -\int_t^{t+h} f(X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^{t+h} Z_r \cdot dW_r$$

where $\mathcal{L}V := \partial_t V + b \cdot DV + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\sigma\sigma^T D^2 V]$. Then

$$-\mathcal{L}V(t,x) - f\left(t, x, V(t,x), \sigma^{\mathrm{T}} DV(t,x)\right) = 0$$

Feynman-Kac representation for semilinear PDE's

Assume that the semilinear PDE

$$-\mathcal{L}V(t,x) - f\left(t,x,V(t,x),\sigma^{\mathrm{T}}DV(t,x)\right) = 0, \qquad V(T,.) = g$$

has a classical solution with polynomial growth. Then
$v(t,x) = Y_t^{t,x}$, where (Y,Z) is the solution of the BSDE :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r,X_r^{t,x})dr + \int_t^s \sigma(r,X_r^{t,x})dW_r$$
$$Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f\left(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x}\right)dr - \int_s^T Z_r^{t,x}dW_r$$

- For $f \equiv 0 \Longrightarrow v(t,x) = Y_t^{t,x} = \mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x})\right]$
- Extension to fully nonlinear PDEs : Cheridito, Soner, T., Victoir (CPAM 06)...
- This representation suggests numerical probabilistic schemes...

Discrete-time approximation of BSDEs

<Bally-Pagès SPA03, Zhang AAP04, Bouchard-T. SPA04>

Numerical solution of a semi-linear PDE by simulating the associated backward SDE by means of Monte Carlo methods
Start from Euler discretization : $Y^n_{t_n} = g\left(X^n_{t_n}\right)$ is given, and

$$Y^n_{t_{i+1}} - Y^n_{t_i} = -f\left(X^n_{t_i}, Y^n_{t_i}, Z^n_{t_i}\right)\Delta t_i + Z^n_{t_i} \cdot \sigma\left(X^n_{t_i}\right)\Delta W_{t_{i+1}}$$

Discrete-time approximation of BSDEs

<Bally-Pagès SPA03, Zhang AAP04, Bouchard-T. SPA04>

Numerical solution of a semi-linear PDE by simulating the associated backward SDE by means of Monte Carlo methods
Start from Euler discretization : $Y^n_{t_n} = g\left(X^n_{t_n}\right)$ is given, and

$$\mathbb{E}^n_i[\qquad \longrightarrow Y^n_{t_{i+1}} - Y^n_{t_i} = -f\left(X^n_{t_i}, Y^n_{t_i}, Z^n_{t_i}\right)\Delta t_i + Z^n_{t_i} \cdot \sigma\left(X^n_{t_i}\right)\Delta W_{t_{i+1}}$$

$\Longrightarrow$ Discrete-time approximation : $Y^n_{t_n} \; = \; g\left(X^n_{t_n}\right)$ and

$$Y^n_{t_i} \;\; = \;\; \mathbb{E}^n_i\left[Y^n_{t_{i+1}}\right] + f\left(X^n_{t_i}, Y^n_{t_i}, Z^n_{t_i}\right)\Delta t_i \qquad , \; 0 \le i \le n-1 \, ,$$

Discrete-time approximation of BSDEs

<Bally-Pagès SPA03, Zhang AAP04, Bouchard-T. SPA04>

Numerical solution of a semi-linear PDE by simulating the associated backward SDE by means of Monte Carlo methods
Start from Euler discretization : $Y^n_{t_n} = g\left(X^n_{t_n}\right)$ is given, and

$$\mathbb{E}^n_i[\Delta W_{t_{i+1}} \quad \longrightarrow \quad Y^n_{t_{i+1}} - Y^n_{t_i} \;=\; -f\left(X^n_{t_i}, Y^n_{t_i}, Z^n_{t_i}\right)\Delta t_i + Z^n_{t_i}\cdot\sigma\left(X^n_{t_i}\right)\Delta W_{t_{i+1}}$$

$\Longrightarrow$ Discrete-time approximation : $Y^n_{t_n} \;=\; g\left(X^n_{t_n}\right)$ and

$$\begin{aligned} Y^n_{t_i} &= \mathbb{E}^n_i\left[Y^n_{t_{i+1}}\right] + f\left(X^n_{t_i}, Y^n_{t_i}, Z^n_{t_i}\right)\Delta t_i \qquad , \; 0 \le i \le n-1 \\ Z^n_{t_i} &= \mathbb{E}^n_i\left[Y^n_{t_{i+1}} \frac{\Delta W_{t_{i+1}}}{\Delta t_i}\right] \end{aligned}$$

Discrete-time approximation of BSDEs

<Bally-Pagès SPA03, Zhang AAP04, Bouchard-T. SPA04>

Numerical solution of a semi-linear PDE by simulating the associated backward SDE by means of Monte Carlo methods
Start from Euler discretization : $Y^n_{t_n} = g\left(X^n_{t_n}\right)$ is given, and

$$\mathbb{E}^n_i[\Delta W_{t_{i+1}} \;\rightarrow\; Y^n_{t_{i+1}} - Y^n_{t_i} \;=\; -f\left(X^n_{t_i}, Y^n_{t_i}, Z^n_{t_i}\right)\Delta t_i + Z^n_{t_i}\cdot\sigma\left(X^n_{t_i}\right)\Delta W_{t_{i+1}}$$

$\Longrightarrow$ Discrete-time approximation : $Y^n_{t_n} \;=\; g\left(X^n_{t_n}\right)$ and

$$\begin{aligned} Y^n_{t_i} &= \mathbb{E}^n_i\left[Y^n_{t_{i+1}}\right] + f\left(X^n_{t_i}, Y^n_{t_i}, Z^n_{t_i}\right)\Delta t_i \qquad ,\ 0 \le i \le n-1 \\ Z^n_{t_i} &= \mathbb{E}^n_i\left[Y^n_{t_{i+1}}\frac{\Delta W_{t_{i+1}}}{\Delta t_i}\right] \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Similar to numerical computation of **American options**

Discrete-time approximation of BSDEs, continued

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T, \; t_i := i\frac{T}{n}$$

Theorem (Zhang 04, Bouchard-T. 04) Assume f and g are Lipschitz. Then :

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/2} \left\{ \sup_{0\le t\le 1} \|Y_t^n - Y_t\|_{\mathbb{L}^2} + \|Z^n - Z\|_{\mathbb{H}^2} \right\} < \infty$$

Theorem (Gobet-Labart 06) Under additional conditions :

$$\limsup_{n\to\infty} n\|Y_0^n - Y_0\|_{\mathbb{L}^2} \quad < \quad \infty$$

Weak error...

Simulation of Backward SDE's

1. Simulate trajectories of the forward process X (well understood)

2. Backward scheme :

$$\left\| \begin{array}{lll} \hat{Y}^n_{t_n} & = & g\left(X^n_{t_n}\right) \\ \hat{Y}^n_{t_{i-1}} & = & \widehat{\mathbb{E}}^n_{t_{i-1}}\left[\hat{Y}^n_{t_i}\right] + f\left(X^n_{t_{i-1}}, \hat{Y}^n_{t_{i-1}}, \hat{Z}^n_{t_{i-1}}\right)\Delta t_i\ , \quad 1 \leq i \leq n\ , \\ \hat{Z}^n_{t_{i-1}} & = & \widehat{\mathbb{E}}^n_{t_{i-1}}\left[\hat{Y}^n_{t_i}\dfrac{\Delta W_{t_i}}{\Delta t_i}\right] \end{array} \right.$$

Simulation of BSDEs : bound on the rate of convergence

Error estimate for the Malliavin-based scheme

Theorem For $p > 1$:

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{0\le i\le n} n^{-1-d/(4p)} N^{1/2p} \left\| \hat{Y}^n_{t_i} - Y^n_{t_i} \right\|_{\mathbb{L}^p} < \infty$$

For the time step $\frac{1}{n}$, and limit case $p = 1$:

rate of convergence of $\frac{1}{\sqrt{n}}$
if and only if
$$n^{-1-\frac{d}{4}} N^{1/2} = n^{1/2}, \quad \text{i.e. } N = n^{3+\frac{d}{2}}$$

Recent developments in Crisan, Manolarakis and T.