Séminaire EDF
Méthodes numériques pour la commande optimale
◊
Calculs d'erreurs en commande optimale stochastique.

Pierre Girardeau et SOWG[1]

EDF — ENPC — ENSTA

9 avril 2009

[1]**Systems and Optimization Working Group**

L. Andrieu, K. Barty, P. Carpentier, J.-P. Chancelier, G. Cohen, A. Dallagi, P. Girardeau & M. de Lara

Plan

Introduction

Objectif

On veut préciser de quelle manière on doit **évaluer la sortie d'un algorithme de commande optimale stochastique**.

Notations

On considère trois types de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- Un état $\mathbf{X}_t$ associé au système à commander ;
- Une commande $\mathbf{U}_t$ qui nous permet de piloter le système ;
- Un bruit $\mathbf{W}_t$ qui influence le système.

On suppose en général que ces variables sont dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le problème

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{X},\mathbf{U}} \quad & \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t\left(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}\right) + K\left(\mathbf{X}_T\right)\right), \\
\text{s.c.} \quad & \mathbf{X}_{t+1} = f_t\left(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}\right), \\
& \mathbf{U}_t \preceq \mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t.
\end{aligned}
$$

Ce qui est "attendu"

Un ensemble de commandes $\widehat{\mathbf{U}}_t$:

$$
\left(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t\right) \longrightarrow \widehat{\mathbf{U}}_t = \widehat{\gamma}_t\left(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t\right)
$$

ou, dans un cadre favorable à la programmation dynamique :

$$
\mathbf{X}_t \longrightarrow \widehat{\mathbf{U}}_t = \widehat{\gamma}_t\left(\mathbf{X}_t\right).
$$

Le problème

$$\min_{\mathbf{X},\mathbf{U}} \quad \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t\left(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}\right) + K\left(\mathbf{X}_T\right)\right),$$

$$\text{s.c.} \quad \mathbf{X}_{t+1} = f_t\left(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}\right),$$

$$\mathbf{U}_t \preceq \mathbf{W}_0, \ldots, \mathbf{W}_t.$$

Ce qui est "attendu"

Un ensemble de commandes $\widehat{\mathbf{U}}_t$:

$$\left(\mathbf{W}_0, \ldots, \mathbf{W}_t\right) \longrightarrow \widehat{\mathbf{U}}_t = \widehat{\gamma}_t\left(\mathbf{W}_0, \ldots, \mathbf{W}_t\right)$$

ou, dans un cadre favorable à la programmation dynamique :

$$\mathbf{X}_t \longrightarrow \widehat{\mathbf{U}}_t = \widehat{\gamma}_t\left(\mathbf{X}_t\right).$$

Un exemple en boucle ouverte

On cherche à estimer la moyenne μ d'une variable aléatoire $\mathbf{W}$ de variance σ^2 :

$$\min_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \mathbb{E}\left((u - \mathbf{W})^2 \right).$$

L'algorithme du gradient stochastique s'écrit ici :

$$\widehat{\mathbf{U}}^k = \widehat{\mathbf{U}}^{k-1} - \frac{1}{k}\left(\widehat{\mathbf{U}}^{k-1} - \mathbf{W}^k\right) \text{ ou } \widehat{\mathbf{U}}^k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \mathbf{W}^j.$$

- $\widehat{\mathbf{U}}^k$ est une variable aléatoire et dépend des tirages.
- $\mathbb{E}\left(\widehat{\mathbf{U}}^k\right) = \mu \Rightarrow$ estimateur non biaisé.
- TCL : $\sqrt{k}\left(\widehat{\mathbf{U}}^k - \mu\right) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \Rightarrow$ variance en $\frac{\sigma^2}{k}$.

Un exemple en boucle ouverte

On cherche à estimer la moyenne μ d'une variable aléatoire $\mathbf{W}$ de variance σ^2 :

$$\min_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \mathbb{E}\left((u - \mathbf{W})^2 \right).$$

L'algorithme du gradient stochastique s'écrit ici :

$$\widehat{\mathbf{U}}^k = \widehat{\mathbf{U}}^{k-1} - \frac{1}{k}\left(\widehat{\mathbf{U}}^{k-1} - \mathbf{W}^k \right) \text{ ou } \widehat{\mathbf{U}}^k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \mathbf{W}^j.$$

- $\widehat{\mathbf{U}}^k$ est une variable aléatoire et dépend des tirages.
- $\mathbb{E}\left(\widehat{\mathbf{U}}^k\right) = \mu \Rightarrow$ estimateur non biaisé.
- TCL : $\sqrt{k}\left(\widehat{\mathbf{U}}^k - \mu\right) \to \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \Rightarrow$ variance en $\frac{\sigma^2}{k}$.

Un exemple en boucle ouverte

On cherche à estimer la moyenne μ d'une variable aléatoire $\mathbf{W}$ de variance σ^2 :

$$\min_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \mathbb{E}\left((u - \mathbf{W})^2 \right) .$$

L'algorithme du gradient stochastique s'écrit ici :

$$\widehat{\mathbf{U}}^k = \widehat{\mathbf{U}}^{k-1} - \frac{1}{k}\left(\widehat{\mathbf{U}}^{k-1} - \mathbf{W}^k\right) \text{ ou } \widehat{\mathbf{U}}^k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \mathbf{W}^j .$$

- $\widehat{\mathbf{U}}^k$ est une variable aléatoire et dépend des tirages.
- $\mathbb{E}\left(\widehat{\mathbf{U}}^k\right) = \mu \Rightarrow$ estimateur non biaisé.
- TCL : $\sqrt{k}\left(\widehat{\mathbf{U}}^k - \mu\right) \to \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \Rightarrow$ variance en $\frac{\sigma^2}{k}$.

Le cas de la boucle fermée

- On se place dans le cadre de la programmation dynamique.
- ξ représente les paramètres aléatoires de la méthode de résolution (tirages d'aléas, construction d'arbres).

Ici $\|\cdot\|^2 = \|\cdot\|^2_{L^2(\mathbf{X})}$. Alors :

Erreur Quadratique Moyenne

$$\begin{aligned}
\mathrm{EQM} &= \mathbb{E}_\xi\left(\left\|\widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{X},\xi) - \mathbf{U}^*(\mathbf{X})\right\|^2_{L^2(\mathbf{X})}\right) \\
&= \left\|\mathbb{E}_\xi\left(\widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{X},\xi)\right) - \mathbf{U}^*(\mathbf{X})\right\|^2_{L^2(\mathbf{X})} \longrightarrow \text{Carré du biais} \\
&+ \mathbb{E}_\xi\left(\left\|\mathbb{E}_\xi\left(\widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{X},\xi)\right) - \widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{X},\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbf{X})}\right) \longrightarrow \text{Variance.}
\end{aligned}$$

Le cas de la boucle fermée

- On se place dans le cadre de la programmation dynamique.
- ξ représente les paramètres aléatoires de la méthode de résolution (tirages d'aléas, construction d'arbres).

Ici $\|\cdot\|^2 = \|\cdot\|^2_{L^2(\mathbf{X})}$. Alors :

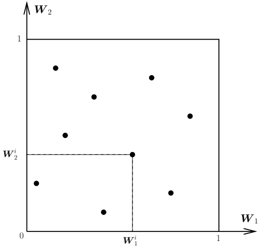
Erreur Quadratique Moyenne

$$\begin{aligned}
\mathrm{EQM} &= \mathbb{E}_\xi\left(\left\|\widehat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{X},\xi\right) - \mathbf{U}^*\left(\mathbf{X}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbf{X})}\right) \\
&= \left\|\mathbb{E}_\xi\left(\widehat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{X},\xi\right)\right) - \mathbf{U}^*\left(\mathbf{X}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbf{X})} \longrightarrow \text{ Carré du biais} \\
&+ \mathbb{E}_\xi\left(\left\|\mathbb{E}_\xi\left(\widehat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{X},\xi\right)\right) - \widehat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{X},\xi\right)\right\|^2_{L^2(\mathbf{X})}\right) \longrightarrow \text{ Variance.}
\end{aligned}$$

Plan

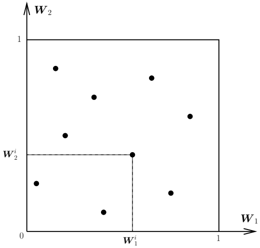
Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

Monte Carlo standard

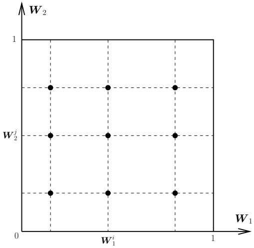


Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

Monte Carlo standard

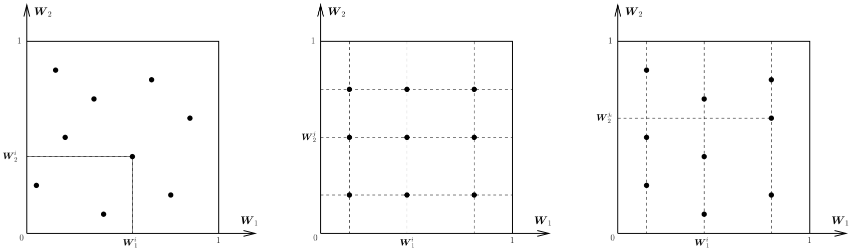


Échantillons croisés



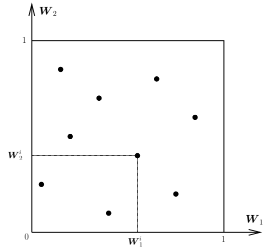
Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

Monte Carlo standard | Échantillons croisés | Échantillons indépendants

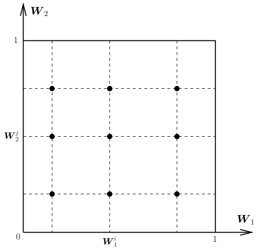


Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

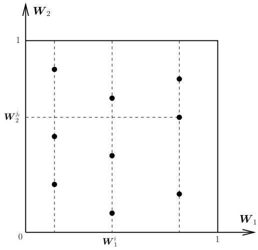
Monte Carlo standard



Échantillons croisés



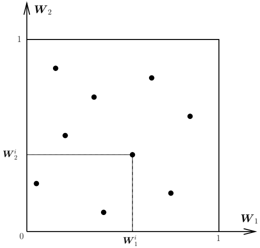
Échantillons indépendants



$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^i)$$

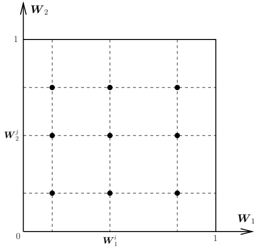
Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

Monte Carlo standard



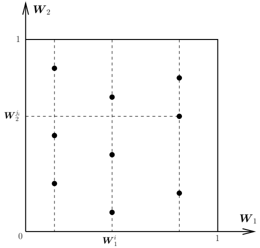
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^i)$$

Échantillons croisés



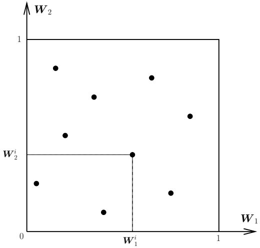
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^j)$$

Échantillons indépendants



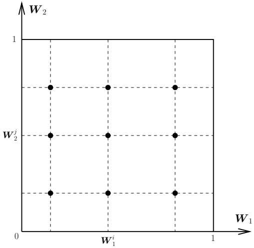
Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

Monte Carlo standard



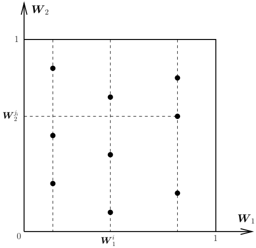
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^i)$$

Échantillons croisés



$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^j)$$

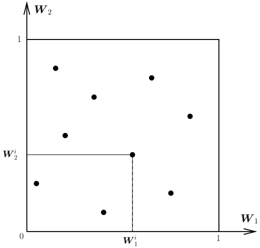
Échantillons indépendants



$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^{i,j})$$

Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

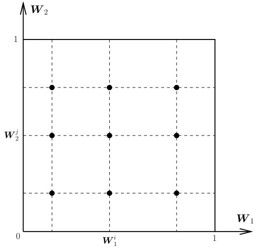
Monte Carlo standard



$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^i)$$

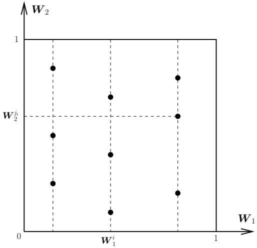
$$\mathbb{V} \sim \frac{1}{N}$$

Échantillons croisés



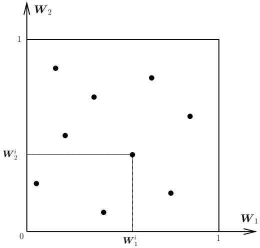
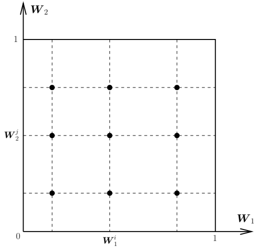
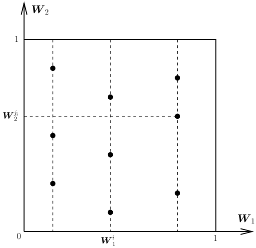
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^j)$$

Échantillons indépendants

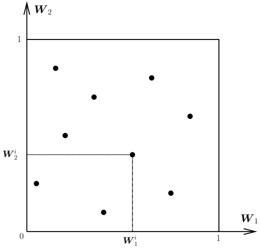
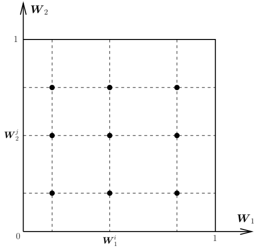
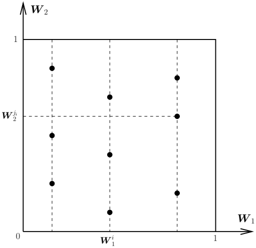


$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^{i,j})$$

Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

Monte Carlo standard	Échantillons croisés	Échantillons indépendants
		
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^i)$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^j)$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^{i,j})$
$\mathbb{V} \sim \frac{1}{N}$	$\mathbb{V} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$	

Estimer $\mathbb{E}\big(f(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)\big)$, avec $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ indépendantes

Monte Carlo standard	Échantillons croisés	Échantillons indépendants
		
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^i)$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^j)$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\sqrt{N}} f(\mathbf{W}_1^i, \mathbf{W}_2^{i,j})$
$\mathbb{V} \sim \frac{1}{N}$	$\mathbb{V} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$	$\mathbb{V} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$

Le cas des arbres de scénarios (suite)

Les modes de calcul 2 et 3 correspondent aux arbres de scénarios (sur deux pas de temps). Transposé au problème d'optimisation stochastique sur T pas de temps, ce calcul montre que l'erreur entre solution exacte et solution discrétisée décroît comme le taux de bifurcation moyen τ et non comme le nombre de feuilles N de l'arbre. Comme

$$N = \tau^T ,$$

on en conclut que le nombre de scénarios nécessaire pour résoudre le problème à précision donnée croît exponentiellement avec T.

Deux résultats allant dans ce sens.

- [Shapiro, 2006] $\mathbb{P}\big(|\inf J_N - \inf J| \geq \epsilon\big) \leq c_1 \mathrm{e}^{-c_2 N^{\frac{1}{T}} \epsilon^2}$.
- [Cohen, 2009] $\mathbb{E}\Big(\big\|\gamma_N(\cdot) - \gamma(\cdot)\big\|^2\Big) \sim \mathrm{O}\Big(N^{-\frac{1}{T+d/2}}\Big)$.

Plan

Rappels

- Algorithme itératif pour résoudre les conditions d'optimalité du problème [Dallagi, 2007].
- Basé sur une technique de Monte-Carlo :
  - On travaille sur N scénarios de bruit $\mathbf{W}^1, \ldots, \mathbf{W}^N$, tirés a priori.
  - L'algorithme calcule une stratégie sous la forme :

$$\widehat{\mathbf{U}}_t(\cdot) = \mathcal{R}\left(\left\{\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i\right\}_{i=1,\ldots,N}\right)(\cdot),$$

avec $\mathcal{R}$ une fonction d'interpolation-régression.

Algorithme (étape ℓ)

1. Propager l'état en avant :

$$\mathbf{X}_0^i = \mathbf{W}_0^i,$$
$$\mathbf{X}_{t+1}^i = f_t\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^i\right).$$

2. Propager l'état adjoint en arrière :
3. Calculer les particules de gradient :
4. Mettre à jour les particules de commande :

Algorithme (étape ℓ)

1. Propager l'état en avant :
2. Propager l'état adjoint en arrière :

$$\boldsymbol{\Lambda}_T^i = K'\left(\mathbf{X}_T^i\right),$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_t^i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L_t}{\partial x}\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right) + \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{t+1}\left(f_t\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right)\right)^\top \frac{\partial f_t}{\partial x}\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right)\right].$$

3. Calculer les particules de gradient :
4. Mettre à jour les particules de commande :

Algorithme (étape ℓ)

1. Propager l'état en avant :
2. Propager l'état adjoint en arrière :
3. Calculer les particules de gradient :

$$G_t^i = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial L_t}{\partial u}\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right) + \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{t+1}\left(f_t\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right)\right)^\top \frac{\partial f_t}{\partial u}\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right) \right]$$

4. Mettre à jour les particules de commande :

Algorithme (étape ℓ)

1. Propager l'état en avant :
2. Propager l'état adjoint en arrière :
3. Calculer les particules de gradient :
4. Mettre à jour les particules de commande :

$$\left(\mathbf{U}_t^i\right)^+ = \mathbf{U}_t^i - \rho G_t^i .$$

Un problème à deux pas de temps

Soient $\mathbf{W}_0$ et $\mathbf{W}_1$ deux variables aléatoires i.i.d. $\mathcal{U}[-1,1]$

- L'aléa $\mathbf{W}_0$ se produit et est observé.
- Une décision $\mathbf{U}$ est prise.
- Un second aléa $\mathbf{W}_1$ se produit.

On cherche à résoudre :

Le problème

$$\min_{\mathbf{U} \preceq \mathbf{W}_0} \mathbb{E}\left(\varepsilon \mathbf{U}^2 + (\mathbf{W}_0 + \mathbf{U} + \mathbf{W}_1)^2\right) := J(\mathbf{U})\,.$$

Un problème à deux pas de temps

Stratégie optimale

La solution optimale se calcule facilement :

$$\mathbf{U}^*(\mathbf{W}_0) = -\frac{\mathbf{W}_0}{1+\varepsilon} \text{ et } J(\mathbf{U}^*) = \frac{1}{3}\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Stratégie particulaire

$$\widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{W}_0) = \mathcal{R}\left(\left\{\mathbf{W}_0^i, \mathbf{U}^i\right\}_{i=1,\dots,n}\right)(\mathbf{W}_0),$$

$$\text{avec : } \mathbf{U}_0^i = -\frac{\mathbf{W}_0^i + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{W}_1^j}{1+\varepsilon}.$$

$\longrightarrow$ La stratégie particulaire dépend de tirages !

Un problème à deux pas de temps

Stratégie optimale

La solution optimale se calcule facilement :

$$\mathbf{U}^*(\mathbf{W}_0) = -\frac{\mathbf{W}_0}{1+\varepsilon} \text{ et } J(\mathbf{U}^*) = \frac{1}{3}\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

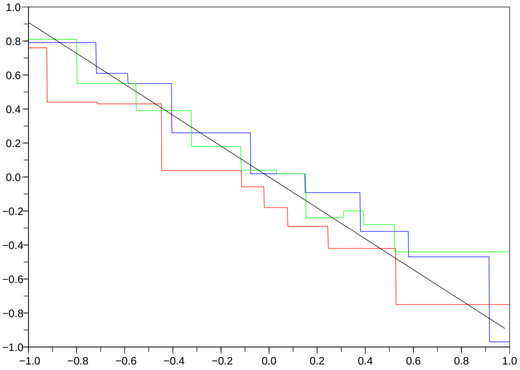
Stratégie particulaire

$$\widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{W}_0) = \mathcal{R}\left(\left\{\mathbf{W}_0^i, \mathbf{U}^i\right\}_{i=1,\dots,n}\right)(\mathbf{W}_0),$$

$$\text{avec : } \mathbf{U}_0^i = -\frac{\mathbf{W}_0^i + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{W}_1^j}{1+\varepsilon}.$$

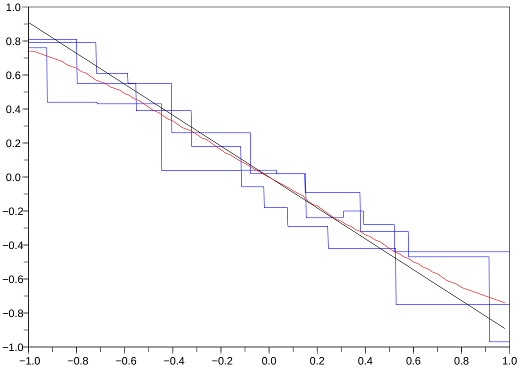
$\hookrightarrow$ La stratégie particulaire dépend de tirages !

Stratégies



- Stratégie optimale (en noir) et stratégies particulaires.

Stratégies



- Stratégie optimale (en noir) et stratégies particulaires.

Erreur

On choisit comme régresseur le plus proche voisin et on cherche à évaluer biais et variance.

Proposition

$$\text{Biais}^2 = \left\| \mathbf{U}^* - \mathbb{E}_\xi\left(\widehat{\mathbf{U}}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbf{X})} = \frac{13}{4\left(1+\varepsilon\right)^2 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\text{Variance} = \mathbb{E}_\xi\left(\left\| \widehat{\mathbf{U}} - \mathbb{E}_\xi\left(\widehat{\mathbf{U}}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbf{X})}\right) = \frac{1}{3\left(1+\varepsilon\right)^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Le biais est négligeable devant la variance.
- La variance est d'ordre minimal (Monte-Carlo).
- Que se passe-t-il lorsque l'horizon augmente ?

Plusieurs pas de temps

Sans introduction d'une variable d'état, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}_0 &= g_0\left(\mathbf{W}_0\right), \\
\mathbf{U}_1 &= g_1\left(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1\right), \\
&\vdots \\
\mathbf{U}_t &= g_t\left(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t\right).
\end{aligned}
$$

$\hookrightarrow$ On s'attend à ce que biais comme variance souffrent de la dimension.

Expérience numérique

Protocole expérimental

On répète $M = 10^4$ fois l'expérience suivante :

1. Tirer N trajectoires (particules) des bruits $\mathbf{W}_0, \ldots, \mathbf{W}_T$.
2. Appliquer l'algorithme particulaire et obtenir une stratégie particulaire (qui dépend des tirages).

On calcule $\widehat{\mathbf{U}}^M(\mathbf{X}) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^M \widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, \xi^j)$ et :

$$\text{Biais}^2 \approx \left\| \mathbf{U}^*(\mathbf{X}) - \widehat{\mathbf{U}}^M(\mathbf{X}) \right\|^2_{L^2(\mathbf{X})},$$

$$\text{Variance} \approx \frac{1}{M}\sum_{j=1}^M \left\| \widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, \xi^j) - \widehat{\mathbf{U}}^M(\mathbf{X}) \right\|^2_{L^2(\mathbf{X})}.$$

Expérience numérique

Protocole expérimental

On répète $M = 10^4$ fois l'expérience suivante :

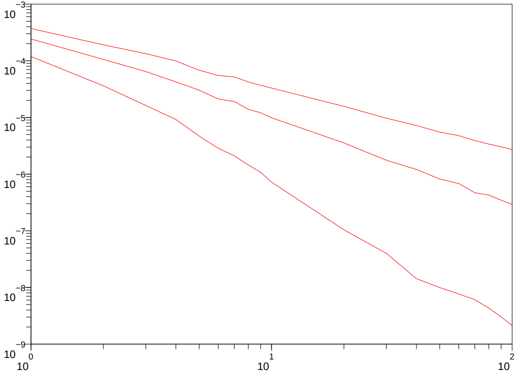
1. Tirer N trajectoires (particules) des bruits $\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_T$.
2. Appliquer l'algorithme particulaire et obtenir une stratégie particulaire (qui dépend des tirages).

On calcule $\widehat{\mathbf{U}}^M(\mathbf{X}) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \widehat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{X}, \xi^j\right)$ et :

$$\text{Biais}^2 \approx \left\| \mathbf{U}^*(\mathbf{X}) - \widehat{\mathbf{U}}^M(\mathbf{X}) \right\|_{L^2(\mathbf{X})}^2 ,$$

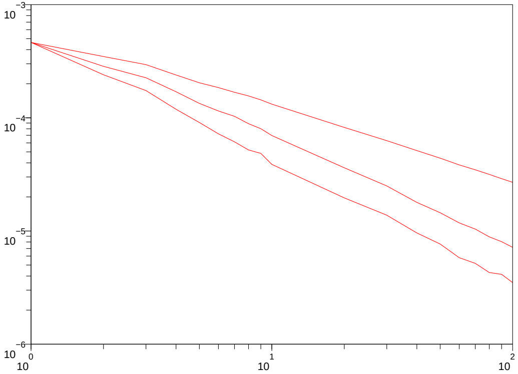
$$\text{Variance} \approx \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \left\| \widehat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{X}, \xi^j\right) - \widehat{\mathbf{U}}^M(\mathbf{X}) \right\|_{L^2(\mathbf{X})}^2 .$$

Plusieurs pas de temps - Biais



- Biais pour un problème à trois pas de temps en fonction du nombre de particules.

Plusieurs pas de temps - Variance



- Variance pour un problème à trois pas de temps en fonction du nombre de particules.

Difficultés théoriques dans le cas général

- Dans le cas avec variable d'état, les équations sont non-linéaires en les $\mathbf{U}_t^i$:

$$\boldsymbol{\Lambda}_t^i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial C_t}{\partial x}\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right) + \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{t+1}\left(f_t\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right)\right)^\top \frac{\partial f_t}{\partial x}\left(\mathbf{X}_t^i, \mathbf{U}_t^i, \mathbf{W}_{t+1}^j\right)\right].$$

- $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{t+1}$ est un opérateur de régression (généralement non-linéaire) portant sur les particules $\mathbf{X}_{t+1}^i$, qui dépendent de $\mathbf{X}_t^i$ et de $\mathbf{U}_t^i$.

On se contentera d'expériences numériques.

Expérience numérique

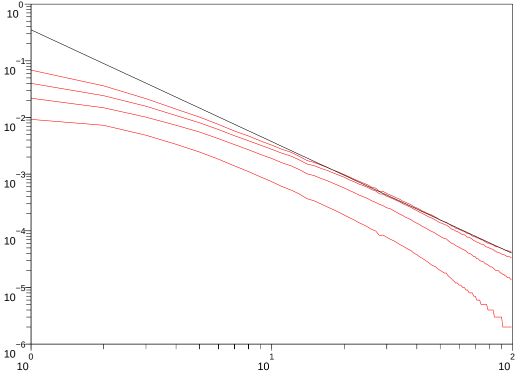
On considère une extension du précédent problème à plusieurs pas de temps :

Le problème

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{X},\mathbf{U}} \quad & \mathbb{E}\left(\varepsilon \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{U}_t^2 + \mathbf{X}_T^2 \right), \\
\text{s.c.} \quad & \mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t + \mathbf{U}_t + \mathbf{W}_{t+1}, \\
& \mathbf{U}_t \preceq \mathbf{X}_t .
\end{aligned}
$$

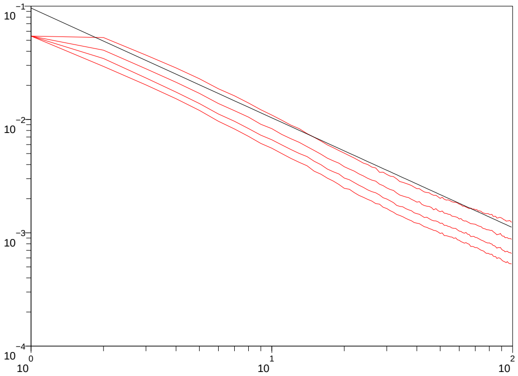
- On espère observer une stabilité du biais et de la variance en fonction du pas de temps.

Résultats - Biais



- Biais pour les 4 stratégies ($T = 4$) en fonction du nombre de particules.

Résultats - Variance



- Variance pour les 4 stratégies ($T = 4$) en fonction du nombre de particules.

Conclusion

- Arbres de scénarios :
  - **L'erreur est inversement proportionnelle au taux de branchement $N^{\frac{1}{T}}$!**
  - Complexité exponentielle en l'horizon de temps.
- Méthodes particulaires :
  - **L'erreur semble peu varier en fonction de T.**
  - Mais on a toujours que l'erreur se dégrade avec la dimension.

Conclusion

- Arbres de scénarios :
  - **L'erreur est inversement proportionnelle au taux de branchement $N^{\frac{1}{T}}$!**
  - Complexité exponentielle en l'horizon de temps.
- Méthodes particulaires :
  - **L'erreur semble peu varier en fonction de T.**
  - Mais on a toujours que l'erreur se dégrade avec la dimension.

Références I

Cohen, G. (2009).
Optimal scenario tree topology and corresponding rate of convergence.
En préparation.

Dallagi, A. (2007).
Méthodes particulaires en commande optimale stochastique.
Thèse de doctorat, Université Paris 1, Panthéon-Sorbonne.

Shapiro, A. (2006).
On complexity of multistage stochastic programs.
Operations Research Letters, 34 :1–8.