

# Mean Field Games et Problématiques de Développement Durable

Aimé Lachapelle

MFG Labs

*Journée de la chaire FDD, 6 décembre 2011*



## La technologie Mean Field Games ...

... se caractérise par:

- la modélisation de systèmes complexes en présence d'un **très grand nombre d'acteurs**
- son positionnement à l'interface de la **théorie des jeux** et de **l'optimisation**
- une approche **macroscopique** avec fondements **microscopiques**

## La technologie Mean Field Games ...

... se caractérise par:

- une extension de la notion d'équilibre de Nash
- une modélisation stochastique :
  - ▶ MFG de première génération: **aléas individuels indépendants**  
( '06 - '09, approche *forward backward*)
  - ▶ MFG de seconde génération: **aléas collectifs**  
( '09 - '11, *master equation*)

## Pourquoi MFG et Développement Durable ?

Beaucoup d'enjeux liés au développement durable...

→ pour lesquels les MFG peuvent aider

- **Enjeux collectifs**: comprendre les **interactions d'un continuum d'agents**
- **Emergence de phénomènes globaux**: approche nécessairement **micro-macro** (cadre mathématique adapté)
- **Externalités et marchés**: l'**anticipation** au coeur du dispositif  
Savoir statuer sur l'**efficacité ou l'inefficacité des équilibres**
- **Politiques publiques** et **incitations** aux **transitions** (notamment technologiques): **agents = joueurs** anticipant, **agents  $\neq$  robots**

## Le point sur les travaux effectués

### 5 grands thèmes

- ▶ Modélisation de production de ressources exhaustibles
- ▶ Modélisation de foules
- ▶ Economie des externalités
- ▶ MFG discrets
- ▶ Méthodes de résolution numérique

Et plus concrètement ...

## Le point sur les travaux effectués

### 2 thèses

O. Guéant (2009) A. Lachapelle (2010)

### 7 cahiers de la chaire

#2 Jeux à champ moyen et application en finance et en développement durable, JM Lasry, PL Lions

#10 A reference Case for Mean Field Games Models, O Guéant

#14 MFG et Biens clubs, JM Lasry, PL Lions

#16 A monotonic algorithm for a mean field games model in economics, AL, J Salomon, G Turinici

#19 La théorie des jeux à champ moyen - Cours Bachelier 2009, JM Lasry

#40 On a mean field game approach modeling congestion and aversion in pedestrian crowds, AL, MT Wolfram

#42 From infinity to one: the reduction of some MFGs to planning problems, JM Lasry, O Guéant

### 2 chapitres de livres

#Chapitre du livre " The economics of sustainable development", Long-run Oil Production - MFG

#Chapitre du livre " Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010 ", MFG and applications

→ **Une dizaine de publications au total**

# Plan

# Plan

## Jeux à champ moyen: concepts

- ▶ **Jeux**: limite d'équilibre de Nash lorsque le nombre de joueurs tend vers l'infini (Lasry & Lions)
- ▶ **Champ moyen**: influence individuelle négligeable sur l'état du système (**jeux non-atomiques**)
- ▶ aspect dynamique, anticipations rationnelles, anonymat des agents
- ▶ risques collectifs vs. risques individuels indépendants
- ▶ alternative à l'*Agent-Based Modeling* (robots sophistiqués  $\neq$  joueurs)

## Jeux à champ moyen: les équations (aléas indépendants)

Système (MFG), horizon fini  $T$

$$\partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(m \nabla_p H(\cdot, \nabla v)) = 0, \quad m(0, \cdot) = m_0,$$

$$\partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v + H(x, \nabla v) = V(m), \quad v(T, \cdot) = g(m_T).$$

- ▶ **forward** (Fokker-Planck, Kolmogorov: densité des agents)
- ▶ **backward** (HJB: contrôle optimal)
- ▶ Asymptotique d'un problème à  $N$  joueurs qui peut aussi se comprendre dans le cadre d'un continuum d'agents

## Le problème individuel du joueur

- ▶ Espace d'états:  $\Omega$ , période à horizon fini  $[0, T]$ , la distribution initiale des agents  $m_0$  est donnée
- ▶ Dynamique contrôlée du joueur partant de  $x$ :  
$$dX_t^x = \alpha_t dt + \sigma dW_t$$
- ▶  $\alpha$  est le contrôle,  $W_t$  un MB standard

Problème individuel du joueur partant de  $x$  à l'instant initial:

$$\inf_{\alpha} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( L(X_t^x, \alpha_t) + V[m_t](X_t^x) \right) dt + g[m_T](X_T^x) \right]$$

- ▶ Point clé: **critère dépendant de  $m_t$  qui est le champ moyen**, i.e. la densité des agents en  $t$ . C'est l'**interaction individuelle avec la collectivité** (qui pourrait aussi être dans la dynamique).

## Dérivation de (MFG): Contrôle stochastique

- ▶ Première étape:  $m$  est donnée (anticipations rationnelles), résolution du programme de contrôle stochastique.

- ▶ Fonction valeur:

$$v(t, x) = \inf_{\alpha} \mathbb{E} \left[ \int_t^T L(X_s^x, \alpha_s) + V[m_s](X_s^x) ds + g[m_T](X_T^x) \right]$$

- ▶ Hamiltonien:  $H(x, p) = L^*(x, p) := \sup_{\alpha} \{p\alpha - L(x, \alpha)\}$

$v$  est solution de l'équation HJB:

$$\partial_t v + \frac{\sigma^2}{2} \Delta v + H(x, \nabla v) = V[m], \quad v|_{t=T} = g[m_T]$$

## Dérivation de (MFG): évolution des agents

- ▶ La première étape a donné un

Contrôle en feedback:

$$\alpha := \alpha(t, x) = \nabla_p H(x, \nabla v(t, x))$$

- ▶ 2de étape: évolution du système résultante de ce feedback

Fokker-Planck (FP)

$$\partial_t m - \frac{\sigma^2}{2} \Delta m + \operatorname{div}(m\alpha) = 0, \quad m(0, \cdot) = m_0$$

- ▶ Bouclage d'équilibre (point fixe):
  - 1) évolution du système **anticipée** → **stratégie optimale**
  - 2) Stratégies optimales → **évolution statistique**
  - 3) Equilibre: **évolution statistique** = **évolution anticipée**.

## Efficacité de l'équilibre

- ▶ Dans certains cas, **les équilibres Nash-MFG maximisent le programme d'un planificateur**
- ▶ Dépend de l'interaction avec le champ moyen
- ▶ Il y a des résultats qui permettent de caractériser ces cas en général
- ▶ Lorsque c'est le cas, on a une interprétation d'efficacité des équilibres (+ problème de contrôle parfait)

---

On va voir à présent des modèles stylisés.

# Plan

## Modèle et aspects MFG

*Mean Field Games and oil production, O Guéant, JM Lasry, PL Lions*

- ▶ Continuum de producteurs de pétrole (atomisés),  
réserves hétérogènes
- ▶ Problème classique du choix du niveau de production optimal
- ▶ Modéliser des entrants possibles (avec énergie partiellement substituable)
- ▶ Interaction MFG via le prix résultant de l'équilibre global entre offre et demande (offre dépend du niveau des réserves)
- ▶ MFG: intégration d'entrants potentiels (énergie de substitution) étude de l'externalité négative

## Les résultats principaux

- ▶ Résultats classiques: **pic de Hubbert**, **rente de Hotelling**
- ▶ Entrants potentiels: temps optimal d'entrée dépend des coûts et subventions
- ▶ Producteur de pétrole: trade-off entre ralentir la production pour ralentir l'entrée et liquider les réserves à bon prix avant l'arrivée de la solution de substitution
- ▶ C'est la **liquidation anticipée des réserves** qui prévaut
- ▶ Subvention nouvelle énergie  $\Rightarrow$  augmentation de la pollution à moyen-terme
- ▶ Etude de l'impact du coût d'entrée: saut (vers le bas) sur la courbe de production

# Plan

## Le modèle

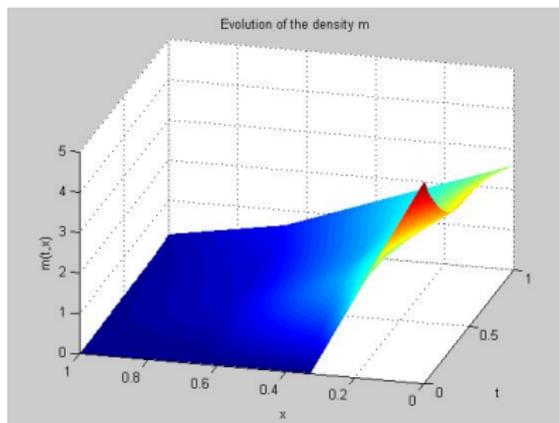
*Computation of Mean Field Equilibria in Economics, AL, J Salomon, G Turinici*

- ▶ But: modéliser la **dynamique et la possibilité d'une transition technologique**
- ▶ Agents consommateurs d'énergie, caractérisés par le niveau d'isolation du logement
- ▶ Variable de contrôle: agir sur l'isolation. Arbitrage entre chauffage et équipement en isolant.
- ▶ Coûts: de contrôle (acquisition en isolant), d'état (chauffage, maintenance)
- ▶ Le prix unitaire de l'énergie subit un choc.

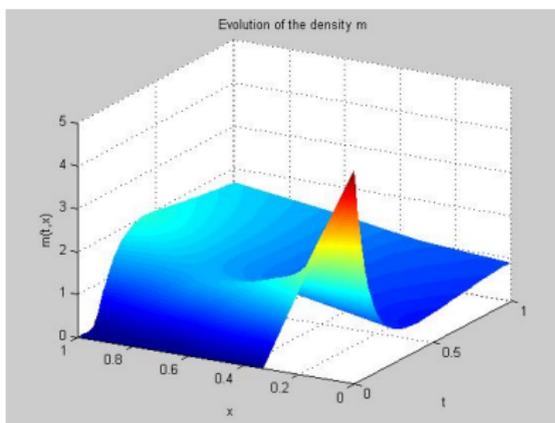
## Les aspects MFG

- ▶ Interaction avec l'ensemble des agents: **modélisation d'externalités et effet d'échelle**
- ▶ **Incitations** pour les agents à **faire le même choix** de technologie, à se regrouper (on s'attend à la non-unicité des équilibres)
- ▶ Donc: terme de champ moyen dans le coût d'état, **monotonie décroissante**

## Les résultats: deux équilibres bien différents



(a) solution avec consommation d'énergie (pas de switch)



(b) solution avec isolation (switch)

Remarques: Paradoxe d'Olson, politiques d'incitation *low cost*

# Plan

## Le modèle

*Travail en cours, R Carmona, F Delarue, AL*

- ▶ Modéliser un système d'incitations aux réductions d'émissions de  $CO_2$  (de type cap & trade) comme un jeu sur une période  $[0, T]$
- ▶ Comparer le cas d'un grand nombre d'entités émettrices compétitives (MFG), et franchisées
- ▶ Les joueurs peuvent, moyennant un coût, réduire leur taux d'émissions

## Les aspects MFG

- ▶ L'interaction individu-communauté a lieu dans le critère final:  
paiement d'une pénalité en cas de dépassement du cap.
- ▶  $X_t^x$  = niveau d'émission instantané en  $t$ ,  
 $\bar{m}_t = \int x m(t, x) dx$ : émissions totales en  $t$ .
- ▶ Coût terminal (schéma avec CAP):  
 $g(\bar{m}_T, X_T) = \lambda X_T 1_{\{\bar{m}_T > \text{CAP}\}}$

## Les résultats principaux

- Pas d'équilibre! (pour des valeurs "raisonnables"  $\bar{m}_0, CAP, \lambda T$ )
  - ▶ Explication intuitive: incohérence anticipation/comportement
  - ▶ Explication mathématique: **discontinuité du coût final** (pas de point fixe)
  - ▶ Le jeu, dans sa forme la plus simple, n'a pas de sens.
- Il faut reconsidérer la pénalité terminale e.g.  
 $g(\bar{m}_T, X_T) = \lambda X_T \bar{m}_T$   
Il existe une solution, on peut comparer les émissions totales en économie régulée ou non.

# Plan

## Bilan des réalisations

- ▶ Planificateur bienveillant vs. compétition parfaite
- ▶ Validation des approches MFG en modélisation (en sciences sociales)
- ▶ **Coût élevé à l'entrée mais fait la différence sur des cas sophistiqués** (développement du capital humain - R Lucas & B Moll, mouvements de foules avec anticipations - MT Wolfram & AL)
- ▶ Mise en place d'une **artillerie numérique** permettant l'approximation de solutions dans de nombreux cas (monotonie croissante et décroissante, hamiltonien quadratique, horizon fini et infini, etc.)

## Autres applications et développements en cours

- ▶ MFG sur les réseaux et les graphes.  
Dynamiques de biens club avec aléa collectif
  
- ▶ Production de ressources et modèles mixtes MFG - market leader (comparaison avec l'équilibre de Stackelberg).  
L'équilibre compétitif épargne moins les réserves que la solution d'un planificateur bienveillant?