Dépendance faible, modèles et applications

Sous échantillonnage d'extrêmes

Paul Doukhan
doukhan@u-cergy.fr
http://www.doukhan.u-cergy.fr

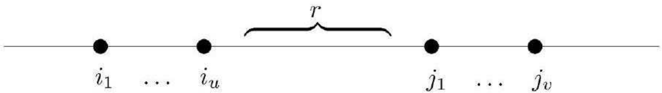
UMR 8088 AGM, Université de Cergy-Pontoise
Institut Universitaire de France

FIME

17 février 2012

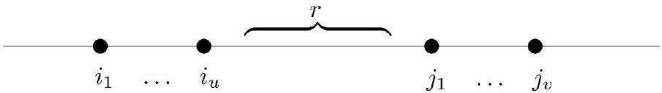
Presentation

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ désigne une série temporelle, une question naturelle est de quantifier l'indépendance asymptotique dans sa dynamique:



Presentation

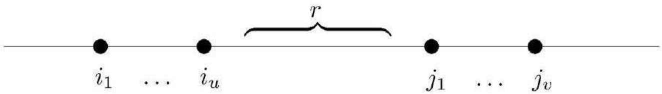
Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ désigne une série temporelle, une question naturelle est de quantifier l'indépendance asymptotique dans sa dynamique:



Le point de vue choisi est élémentaire et a pour objet l'analyse de grands échantillons

Presentation

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ désigne une série temporelle, une question naturelle est de quantifier l'indépendance asymptotique dans sa dynamique:

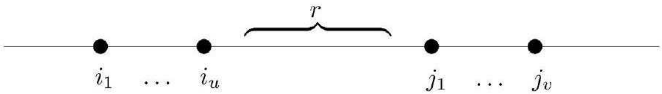


Le point de vue choisi est élémentaire et a pour objet l'analyse de grands échantillons

Plan:

Presentation

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ désigne une série temporelle, une question naturelle est de quantifier l'indépendance asymptotique dans sa dynamique:



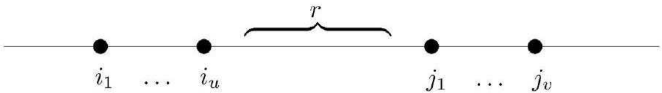
Le point de vue choisi est élémentaire et a pour objet l'analyse de grands échantillons

Plan:

- De l'indépendance à la dépendance

Presentation

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ désigne une série temporelle, une question naturelle est de quantifier l'indépendance asymptotique dans sa dynamique:



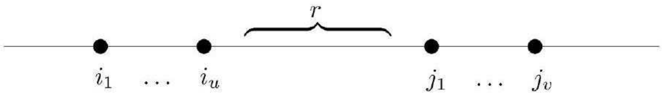
Le point de vue choisi est élémentaire et a pour objet l'analyse de grands échantillons

Plan:

- De l'indépendance à la dépendance
- Modèles

Presentation

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ désigne une série temporelle, une question naturelle est de quantifier l'indépendance asymptotique dans sa dynamique:



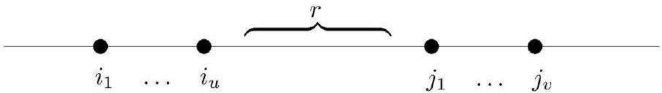
Le point de vue choisi est élémentaire et a pour objet l'analyse de grands échantillons

Plan:

- De l'indépendance à la dépendance
- Modèles
- Applications

Presentation

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ désigne une série temporelle, une question naturelle est de quantifier l'indépendance asymptotique dans sa dynamique:



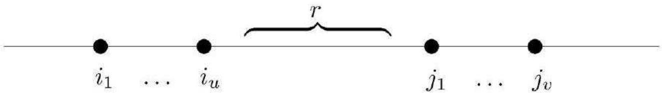
Le point de vue choisi est élémentaire et a pour objet l'analyse de grands échantillons

Plan:

- De l'indépendance à la dépendance
- Modèles
- Applications
- Sous-échantillonnage de valeurs extrêmes

Presentation

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ désigne une série temporelle, une question naturelle est de quantifier l'indépendance asymptotique dans sa dynamique:



Le point de vue choisi est élémentaire et a pour objet l'analyse de grands échantillons

Plan:

- De l'indépendance à la dépendance
- Modèles
- Applications
- Sous-échantillonnage de valeurs extrêmes
- Technique

Indépendance

La question posée est,

Indépendance

La question posée est, comment relaxer la relation d'indépendance?

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \qquad ?$$

Indépendance

La question posée est, comment relaxer la relation d'indépendance?

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \qquad ?$$

liant les événements $A \in \sigma(P)$ du passé à ceux $B \in \sigma(F)$ d'un futur, pas si proche.

Indépendance

La question posée est, comment relaxer la relation d'indépendance?

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad ?$$

liant les événements $A \in \sigma(P)$ du passé à ceux $B \in \sigma(F)$ d'un futur, pas si proche.
Cette relation se réécrit aussi:

$$\mathrm{Cov}(f(P), g(F)) = 0, \qquad \forall f, g, \quad \|f\|_\infty, \|g\|_\infty \leq 1$$

Indépendance

La question posée est, comment relaxer la relation d'indépendance?

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \qquad ?$$

liant les événements $A \in \sigma(P)$ du passé à ceux $B \in \sigma(F)$ d'un futur, pas si proche.
Cette relation se réécrit aussi:

$$\mathrm{Cov}(f(P), g(F)) = 0, \qquad \forall f, g, \quad \|f\|_\infty, \|g\|_\infty \leq 1$$

(Les variables P, F désignent Passé et Futur)

Mixing (Rosenblatt, 1956)

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) &= \sup_{A,B}|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|\\ &= \frac{1}{2}\sup_{\|f\|_\infty,\|g\|_\infty\le 1}|\mathrm{Cov}(f(P),g(F))|\end{aligned}$$

Mixing (Rosenblatt, 1956)

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) &= \sup_{A,B}|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \\ &= \frac{1}{2}\sup_{\|f\|_\infty,\|g\|_\infty\le 1}|\mathrm{Cov}(f(P),g(F))|\end{aligned}$$

$X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $P=(X_{i_1},\ldots,X_{i_u})$, $F=(X_{j_1},\ldots,X_{j_v})$,
$i_1\le\cdots\le i_u, j_1\le\cdots\le j_v$ et $r=j_1-i_u$ est grand:

$$\alpha(r)=\sup_{P,F}\alpha(\sigma(P),\sigma(F))\to_{r\to\infty}0$$

Modèles non-mixing

Mixing (Rosenblatt, 1956)

$$\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) = \sup_{A,B} |\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|$$
$$= \frac{1}{2}\sup_{\|f\|_\infty,\|g\|_\infty\le 1} |\mathrm{Cov}(f(P),g(F))|$$

$X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $P=(X_{i_1},\ldots,X_{i_u})$, $F=(X_{j_1},\ldots,X_{j_v})$,
$i_1\le\cdots\le i_u, j_1\le\cdots\le j_v$ et $r=j_1-i_u$ est grand:

$$\alpha(r)=\sup_{P,F}\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) \to_{r\to\infty} 0$$

Modèles non-mixing

$X_t=\frac{1}{2}\left(X_{t-1}+\xi_t\right), \xi_t\sim b\left(\frac{1}{2}\right)$ iid, Andrews-Rosenblatt (1984)

Mixing (Rosenblatt, 1956)

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) &= \sup_{A,B} |\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \\ &= \frac{1}{2}\sup_{\|f\|_\infty,\|g\|_\infty\le 1} |\mathrm{Cov}(f(P),g(F))|\end{aligned}$$

$X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $P=(X_{i_1},\ldots,X_{i_u})$, $F=(X_{j_1},\ldots,X_{j_v})$,
$i_1\le\cdots\le i_u, j_1\le\cdots\le j_v$ et $r=j_1-i_u$ est grand:

$$\alpha(r)=\sup_{P,F}\alpha(\sigma(P),\sigma(F))\to_{r\to\infty} 0$$

Modèles non-mixing

$X_t=\frac{1}{2}\left(X_{t-1}+\xi_t\right), \xi_t\sim b\left(\frac{1}{2}\right)$ iid, Andrews-Rosenblatt (1984), $X_{t-1}=\mathrm{frac}(2X_t)$

Mixing (Rosenblatt, 1956)

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) &= \sup_{A,B} |\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\|f\|_\infty,\|g\|_\infty\le 1} |\mathrm{Cov}(f(P),g(F))|\end{aligned}$$

$X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $P=(X_{i_1},\ldots,X_{i_u})$, $F=(X_{j_1},\ldots,X_{j_v})$, $i_1\le\cdots\le i_u, j_1\le\cdots\le j_v$ et $r=j_1-i_u$ est grand:

$$\alpha(r)=\sup_{P,F}\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) \to_{r\to\infty} 0$$

Modèles non-mixing

$X_t=\frac{1}{2}\left(X_{t-1}+\xi_t\right), \xi_t\sim b\left(\frac{1}{2}\right)$ iid, Andrews-Rosenblatt (1984), $X_{t-1}=\mathrm{frac}(2X_t)$
$X_t=\xi_t(1+aX_{t-1})$, $\mathbb{P}(\xi_0=\pm 1)=1/2$, $a\in\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right]$

Mixing (Rosenblatt, 1956)

$$\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) = \sup_{A,B} |\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = \frac{1}{2}\sup_{\|f\|_\infty,\|g\|_\infty\le 1}|\mathrm{Cov}(f(P),g(F))|$$

$X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $P=(X_{i_1},\ldots,X_{i_u})$, $F=(X_{j_1},\ldots,X_{j_v})$, $i_1\le\cdots\le i_u, j_1\le\cdots\le j_v$ et $r=j_1-i_u$ est grand:

$$\alpha(r)=\sup_{P,F}\alpha(\sigma(P),\sigma(F))\to_{r\to\infty} 0$$

Modèles non-mixing

$X_t=\frac{1}{2}\left(X_{t-1}+\xi_t\right), \xi_t\sim b\left(\frac{1}{2}\right)$ iid, Andrews-Rosenblatt (1984), $X_{t-1}=\mathrm{frac}(2X_t)$

$X_t=\xi_t(1+aX_{t-1})$, $\mathbb{P}(\xi_0=\pm 1)=1/2$, $a\in\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right]$, $X_t=\sum_{j\ge 0}a^j\xi_t\cdots\xi_{t-j}$

Mixing (Rosenblatt, 1956)

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma(P),\sigma(F)) &= \sup_{A,B}|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \\ &= \frac{1}{2}\sup_{\|f\|_\infty,\|g\|_\infty\le 1}|\mathrm{Cov}(f(P),g(F))|\end{aligned}$$

$X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $P=(X_{i_1},\ldots,X_{i_u})$, $F=(X_{j_1},\ldots,X_{j_v})$,
$i_1\le\cdots\le i_u, j_1\le\cdots\le j_v$ et $r=j_1-i_u$ est grand:

$$\alpha(r)=\sup_{P,F}\alpha(\sigma(P),\sigma(F))\to_{r\to\infty} 0$$

Modèles non-mixing

$X_t=\frac{1}{2}(X_{t-1}+\xi_t)$, $\xi_t\sim b\left(\frac{1}{2}\right)$ iid, Andrews-Rosenblatt (1984), $X_{t-1}=\mathrm{frac}(2X_t)$

$X_t=\xi_t(1+aX_{t-1})$, $\mathbb{P}(\xi_0=\pm 1)=1/2$, $a\in\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right]$, $X_t=\sum_{j\ge 0}a^j\xi_t\cdots\xi_{t-j}$

Rio (2000): théorie asymptotique aboutie, Doukhan (1994): exemples de modèles, Bradley (2007): présentation élémentaire complète

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité

$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \implies$ l'indépendance stochastique du couple (X, Y), lorsque

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité

Cov$(X, Y) = 0 \Longrightarrow$ l'indépendance stochastique du couple (X, Y), lorsque

$$X, Y \in \{0, 1\} \quad \text{suivent des lois de Bernoulli}$$

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité

Cov$(X,Y)=0 \Longrightarrow$ l'indépendance stochastique du couple (X,Y), lorsque

$X, Y \in \{0,1\}$	suivent des lois de Bernoulli
(X,Y)	est un vecteur Gaussien

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité
$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \implies$ l'indépendance stochastique du couple (X, Y), lorsque

$X, Y \in \{0, 1\}$	suivent des lois de Bernoulli
(X,Y)	est un vecteur Gaussien
(X,Y)	est un vecteur associé (voir plus bas)

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité
$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \Longrightarrow$ l'indépendance stochastique du couple (X, Y), lorsque

$X, Y \in \{0, 1\}$	suivent des lois de Bernoulli
(X,Y)	est un vecteur Gaussien
(X,Y)	est un vecteur associé (voir plus bas)

$X \in \mathbb{R}^p$ est associé si $\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$ pour $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\uparrow$ coordonnée par coordonnée,

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité
$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \Longrightarrow$ l'indépendance stochastique du couple (X, Y), lorsque

$X, Y \in \{0, 1\}$	suivent des lois de Bernoulli
(X,Y)	est un vecteur Gaussien
(X,Y)	est un vecteur associé (voir plus bas)

$X \in \mathbb{R}^p$ est associé si $\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$ pour $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\uparrow$ coordonnée par coordonnée,
Pour $(X, Y) \in \mathbb{R}^{p+q}$ associé, ou Gaussien,

$$|\mathrm{Cov}(f(X), g(Y))| \leq \sum_{i,j} a_i b_j |\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)|$$

$$\begin{aligned}
|f(x_1, \ldots, x_p) - f(y_1, \ldots, y_p)| &\leq a_1|x_1 - y_1| + \cdots + a_p|x_p - y_p| \\
|g(x_1, \ldots, x_q) - g(y_1, \ldots, y_q)| &\leq b_1|x_1 - y_1| + \cdots + b_q|x_q - y_q|
\end{aligned}$$

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité
$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \Longrightarrow$ l'indépendance stochastique du couple (X, Y), lorsque

$X, Y \in \{0, 1\}$	suivent des lois de Bernoulli
(X,Y)	est un vecteur Gaussien
(X,Y)	est un vecteur associé (voir plus bas)

$X \in \mathbb{R}^p$ est associé si $\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$ pour $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\uparrow$ coordonnée par coordonnée,
Pour $(X, Y) \in \mathbb{R}^{p+q}$ associé, ou Gaussien,

$$|\mathrm{Cov}(f(X), g(Y))| \leq \sum_{i,j} a_i b_j |\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)|$$

$$\begin{aligned}
|f(x_1, \ldots, x_p) - f(y_1, \ldots, y_p)| &\leq a_1|x_1 - y_1| + \cdots + a_p|x_p - y_p| \\
|g(x_1, \ldots, x_q) - g(y_1, \ldots, y_q)| &\leq b_1|x_1 - y_1| + \cdots + b_q|x_q - y_q|
\end{aligned}$$

Une définition de la dépendance faible devra être robuste, et aussi porter une théorie limite assez *raisonnable* pour valider les procédures statistiques utiles.

Covariances et indépendance

L'indépendance coïncide parfois avec l'orthogonalité
$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \Longrightarrow$ l'indépendance stochastique du couple (X,Y), lorsque

$X, Y \in \{0,1\}$	suivent des lois de Bernoulli
(X,Y)	est un vecteur Gaussien
(X,Y)	est un vecteur associé (voir plus bas)

$X \in \mathbb{R}^p$ est associé si $\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$ pour $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\uparrow$ coordonnée par coordonnée,
Pour $(X, Y) \in \mathbb{R}^{p+q}$ associé, ou Gaussien,

$$|\mathrm{Cov}(f(X), g(Y))| \leq \sum_{i,j} a_i b_j |\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)|$$

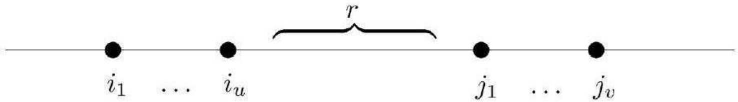
$$\begin{aligned} |f(x_1,\ldots,x_p) - f(y_1,\ldots,y_p)| &\leq a_1|x_1-y_1| + \cdots + a_p|x_p-y_p| \\ |g(x_1,\ldots,x_q) - g(y_1,\ldots,y_q)| &\leq b_1|x_1-y_1| + \cdots + b_q|x_q-y_q| \end{aligned}$$

Une définition de la dépendance faible devra être robuste, et aussi porter une théorie limite assez *raisonnable* pour valider les procédures statistiques utiles.
Bickel, Buehlmann (1999) définissent aussi une dépendance faible à des fins de bootstrap: dans ce cas les innovations n'ont pas de densité.

Doukhan & Louhichi, 1999

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ $(\in E)$, $f : E^u \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}$ et $g : E^v \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{G}$:

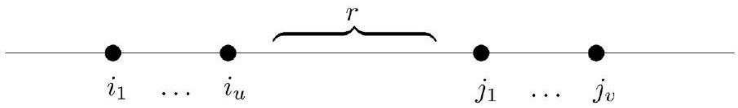
$$\left|\mathrm{Cov}\left(f(X_{i_1},\ldots,X_{i_u}),g(X_{j_1},\ldots,X_{j_v})\right)\right| \le \Psi(f,g)\epsilon(r), \quad \epsilon(r)\downarrow 0$$



Doukhan & Louhichi, 1999

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ $(\in E)$, $f : E^u \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}$ et $g : E^v \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{G}$:

$$|\mathrm{Cov}\,(f(X_{i_1},\ldots,X_{i_u}),g(X_{j_1},\ldots,X_{j_v}))| \le \Psi(f,g)\epsilon(r), \quad \epsilon(r)\downarrow 0$$

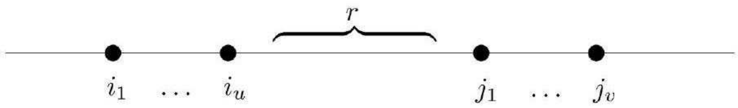


$$\Psi(f,g) \;=\; v\mathrm{Lip}\,g, \qquad\qquad \epsilon(r)=\theta(r),$$

Doukhan & Louhichi, 1999

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ $(\in E)$, $f : E^u \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}$ et $g : E^v \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{G}$:

$$|\mathrm{Cov}\,(f(X_{i_1},\ldots,X_{i_u}),g(X_{j_1},\ldots,X_{j_v}))| \le \Psi(f,g)\epsilon(r), \quad \epsilon(r)\downarrow 0$$

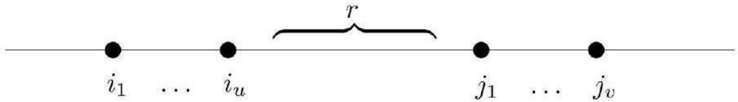


$$\begin{aligned}\Psi(f,g) &= v\,\mathrm{Lip}\,g, & \epsilon(r) = \theta(r),\\ &= u\,\mathrm{Lip}\,f + v\,\mathrm{Lip}\,g + uv\,\mathrm{Lip}\,f\cdot\mathrm{Lip}\,g, & \epsilon(r)=\lambda(r)\end{aligned}$$

Doukhan & Louhichi, 1999

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ $(\in E)$, $f : E^u \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}$ et $g : E^v \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{G}$:

$$|\mathrm{Cov}\,(f(X_{i_1},\ldots,X_{i_u}), g(X_{j_1},\ldots,X_{j_v}))| \le \Psi(f,g)\epsilon(r), \quad \epsilon(r)\downarrow 0$$



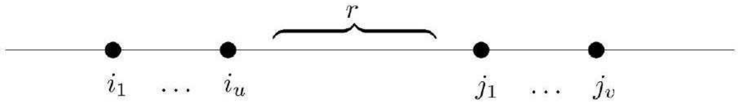
$$\begin{aligned} \Psi(f,g) &= v\mathrm{Lip}\, g, & \epsilon(r) = \theta(r), \\ &= u\mathrm{Lip}\, f + v\mathrm{Lip}\, g + uv\mathrm{Lip}\, f\cdot \mathrm{Lip}\, g, & \epsilon(r) = \lambda(r) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Lip}\, f = \sup_{(y_1,\ldots,y_u)\neq(x_1,\ldots,x_u)} \frac{|f(y_1,\ldots,y_u) - f(x_1,\ldots,x_u)|}{\|y_1-x_1\|+\cdots+\|y_u-x_u\|}.$$

Doukhan & Louhichi, 1999

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ $(\in E)$, $f : E^u \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}$ et $g : E^v \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{G}$:

$$|\mathrm{Cov}\,(f(X_{i_1},\ldots,X_{i_u}),g(X_{j_1},\ldots,X_{j_v}))| \le \Psi(f,g)\epsilon(r), \quad \epsilon(r)\downarrow 0$$



$$\begin{aligned}\Psi(f,g) &= v\mathrm{Lip}\,g, & \epsilon(r)=\theta(r),\\ &= u\mathrm{Lip}\,f + v\mathrm{Lip}\,g + uv\mathrm{Lip}\,f\cdot\mathrm{Lip}\,g, & \epsilon(r)=\lambda(r)\end{aligned}$$

$$\mathrm{Lip}\,f = \sup_{(y_1,\ldots,y_u)\neq(x_1,\ldots,x_u)} \frac{|f(y_1,\ldots,y_u)-f(x_1,\ldots,x_u)|}{\|y_1-x_1\|+\cdots+\|y_u-x_u\|}.$$

Les cas des champs aléatoires ou des processus ponctuels sont aussi envisagés.

Modèles LARCH(∞)

$$X_t = \xi_t\Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j}\Big), \quad X_t(n\times 1), \xi_t(n\times p), a(p\times 1), a_j(p\times n)$$

Modèles LARCH(∞)

$$X_t = \xi_t\Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j}\Big), \quad X_t(n\times 1), \xi_t(n\times p), a(p\times 1), a_j(p\times n)$$

Si $\phi = \|\xi_0\|_m \sum_j \|a_j\| < 1$, une solution stationnaire dans $\mathbb{L}^m$ s'écrit

$$X_t = \xi_t\Big(a + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_k \geq 1} a_{j_1}\xi_{t-j_1}\cdots a_{j_k}\xi_{t-j_1-\cdots-j_k}a\Big)$$

Modèles LARCH(∞)

$$X_t = \xi_t\Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j}\Big), \quad X_t(n\times 1), \xi_t(n\times p), a(p\times 1), a_j(p\times n)$$

Si $\phi = \|\xi_0\|_m \sum_j \|a_j\| < 1$, une solution stationnaire dans $\mathbb{L}^m$ s'écrit

$$X_t = \xi_t\Big(a + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_k\geq 1} a_{j_1}\xi_{t-j_1}\cdots a_{j_k}\xi_{t-j_1-\cdots-j_k}\, a\Big)$$

Alors	$\theta(t)$	$\leq$	$C\,t^{-b}$,	$C\,(q\vee\phi)^{\sqrt{t}}$,		$C\,e^{-bt}$
si respectivement	$\sum_{j\geq s}\|a_j\|$	$\leq$	$C's^{-b}$,	$C'q^s$,	ou	$a_j = 0,\ j > C'$

Modèles LARCH(∞)

$$X_t = \xi_t\Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j}\Big), \quad X_t(n\times 1), \xi_t(n\times p), a(p\times 1), a_j(p\times n)$$

Si $\phi = \|\xi_0\|_m \sum_j \|a_j\| < 1$, une solution stationnaire dans $\mathbb{L}^m$ s'écrit

$$X_t = \xi_t\Big(a + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_k\geq 1} a_{j_1}\xi_{t-j_1}\cdots a_{j_k}\xi_{t-j_1-\cdots-j_k}a\Big)$$

Alors	$\theta(t)$	$\leq$	$C\,t^{-b}$,	$C\,(q\vee\phi)^{\sqrt{t}}$,	$C\,e^{-bt}$
si respectivement	$\sum_{j\geq s}\|a_j\|$	$\leq$	$C's^{-b}$,	$C'q^s$, ou	$a_j = 0,\ j > C'$

- GARCH(p,q) (Engle, Granger) $r_t = \sigma_t\epsilon_t,\ \sigma_t^2 = \sum_{j=1}^p \beta_j\sigma_{t-j}^2 + \gamma_0 + \sum_{j=1}^q \gamma_j r_{t-j}^2$
- ARCH(∞) (Surgailis *et al.* 2001) $r_t = \sigma_t\epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j r_{t-j}^2$
- Bilinéaires (Giraitis, Surgailis, 2003) $X_t = \zeta_t\Big(a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j}\Big) + b + \sum_{j=1}^{\infty} b_j X_{t-j}$

Modèles à mémoire

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots ; \xi_t), \qquad (\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}} \text{ iid}, \ F : (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$$

Modèles à mémoire

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots; \xi_t), \qquad (\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}} \text{ iid}, \ F : (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$$

$$\|F(x_1, x_2, x_3, \ldots; \xi_t) - F(y_1, y_2, y_3, \ldots; \xi_t)\|_m \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j \|x_j - y_j\|$$

$$\|F(0, 0, 0, \ldots; \xi_t)\|_m < \infty, \qquad a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j < 1 \quad (m \geq 1)$$

implique l'existence dans $\mathbb{L}^m$ d'une solution stationnaire et sa dépendance faible:

$$\theta(r) \leq C \inf_{N>0} \left(\sum_{j\geq N} a_j + a^{\frac{r}{N}} \right)$$

Modèles à mémoire

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots; \xi_t), \qquad (\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}} \text{ iid, } F : (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$$

$$\|F(x_1, x_2, x_3, \ldots; \xi_t) - F(y_1, y_2, y_3, \ldots; \xi_t)\|_m \le \sum_{j=1}^{\infty} a_j \|x_j - y_j\|$$

$$\|F(0,0,0,\ldots;\xi_t)\|_m < \infty, \qquad a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j < 1 \quad (m \ge 1)$$

implique l'existence dans $\mathbb{L}^m$ d'une solution stationnaire et sa dépendance faible:

$$\theta(r) \le C \inf_{N>0} \left(\sum_{j\ge N} a_j + a^{\frac{r}{N}} \right)$$

- Autorégressions $\quad X_t = f(X_{t-1}, \ldots, X_{t-k}) + \zeta_t g(X_{t-1}, \ldots, X_{t-k}) + \xi_t$
- variations sur le LARCH $\quad X_t = \xi_t \left(a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(X_{t-j}) \right)$, a_j Lipschitz
- Modèles à champ moyen $\quad X_t = f\left(\xi_t, \sum_{s\ge1} a_s X_{t-s}\right)$, f Lipschitz

Modèles à valeurs entières

Opérateur d'amincissement de Steutel & van Harn:

$$a \circ X = sign(X) \sum_{i=1}^{|X|} Y_i \qquad a > 0, \quad X \in \mathbb{Z}$$

$(Y_i)_i$ iid et contexte-indépendant, $\mathbb{E} Y_0 = a$ (eg. Poisson ou Bernoulli).

Modèles à valeurs entières

Opérateur d'amincissement de Steutel & van Harn:

$$a \circ X = sign(X) \sum_{i=1}^{|X|} Y_i \qquad a > 0, \quad X \in \mathbb{Z}$$

$(Y_i)_i$ iid et contexte-indépendant, $\mathbb{E} Y_0 = a$ (eg. Poisson ou Bernoulli).

- Modèle de Galton-Watson avec immigration, INAR $X_t = a \circ X_{t-1} + \xi_t$

Modèles à valeurs entières

Opérateur d'amincissement de Steutel & van Harn:

$$a \circ X = sign(X) \sum_{i=1}^{|X|} Y_i \qquad a > 0, \quad X \in \mathbb{Z}$$

$(Y_i)_i$ iid et contexte-indépendant, $\mathbb{E}Y_0 = a$ (eg. Poisson ou Bernoulli).

- Modèle de Galton-Watson avec immigration, INAR $X_t = a \circ X_{t-1} + \xi_t$
- Modèles bilinéaires entiers $X_t = a \circ X_{t-1} + b \circ (\varepsilon_{t-1} X_{t-1}) + \varepsilon_t$ Doukhan, Latour, Oraichi, 2006.

Modèles à valeurs entières

Opérateur d'amincissement de Steutel & van Harn:

$$a \circ X = sign(X) \sum_{i=1}^{|X|} Y_i \qquad a > 0, \quad X \in \mathbb{Z}$$

$(Y_i)_i$ iid et contexte-indépendant, $\mathbb{E}Y_0 = a$ (eg. Poisson ou Bernoulli).

- Modèle de Galton-Watson avec immigration, INAR $X_t = a \circ X_{t-1} + \xi_t$
- Modèles bilinéaires entiers $X_t = a \circ X_{t-1} + b \circ (\varepsilon_{t-1} X_{t-1}) + \varepsilon_t$ Doukhan, Latour, Oraichi, 2006.
- INLARCH(∞) QMLE, Latour, Truquet 2008.

$$X_t = \xi_t \left(a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \circ X_{t-j} \right)$$

Modèles à valeurs entières

Opérateur d'amincissement de Steutel & van Harn:

$$a \circ X = sign(X) \sum_{i=1}^{|X|} Y_i \qquad a > 0, \quad X \in \mathbb{Z}$$

$(Y_i)_i$ iid et contexte-indépendant, $\mathbb{E}Y_0 = a$ (eg. Poisson ou Bernoulli).

- Modèle de Galton-Watson avec immigration, INAR $X_t = a \circ X_{t-1} + \xi_t$
- Modèles bilinéaires entiers $X_t = a \circ X_{t-1} + b \circ (\varepsilon_{t-1} X_{t-1}) + \varepsilon_t$ Doukhan, Latour, Oraichi, 2006.
- INLARCH(∞) QMLE, Latour, Truquet 2008.

$$X_t = \xi_t \Big(a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \circ X_{t-j} \Big)$$

- Random-INAR $X_t = a_t \circ X_{t-1} + \xi_t$, stationnaire (a_t) avec $\mathbb{E}(a_t | \mathcal{F}_{t-1}) < 1$.

Modèles à valeurs entières

Opérateur d'amincissement de Steutel & van Harn:

$$a \circ X = sign(X) \sum_{i=1}^{|X|} Y_i \qquad a > 0, \quad X \in \mathbb{Z}$$

$(Y_i)_i$ iid et contexte-indépendant, $\mathbb{E} Y_0 = a$ (eg. Poisson ou Bernoulli).

- Modèle de Galton-Watson avec immigration, INAR $X_t = a \circ X_{t-1} + \xi_t$
- Modèles bilinéaires entiers $X_t = a \circ X_{t-1} + b \circ (\varepsilon_{t-1} X_{t-1}) + \varepsilon_t$ Doukhan, Latour, Oraichi, 2006.
- INLARCH(∞) QMLE, Latour, Truquet 2008.

$$X_t = \xi_t \left(a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \circ X_{t-j} \right)$$

- Random-INAR $X_t = a_t \circ X_{t-1} + \xi_t$, stationnaire (a_t) avec $\mathbb{E}(a_t | \mathcal{F}_{t-1}) < 1$.
- Poisson GLM $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_t)$ avec $\lambda_t = g(\lambda_{t-1}, X_{t-1}, \ldots)$ avec Fokianos, Tjostheim, Moulines et Douc.

Modèles à valeurs entières

Opérateur d'amincissement de Steutel & van Harn:

$$a \circ X = sign(X) \sum_{i=1}^{|X|} Y_i \qquad a > 0, \quad X \in \mathbb{Z}$$

$(Y_i)_i$ iid et contexte-indépendant, $\mathbb{E}Y_0 = a$ (eg. Poisson ou Bernoulli).

- Modèle de Galton-Watson avec immigration, INAR $X_t = a \circ X_{t-1} + \xi_t$
- Modèles bilinéaires entiers $X_t = a \circ X_{t-1} + b \circ (\varepsilon_{t-1} X_{t-1}) + \varepsilon_t$ Doukhan, Latour, Oraichi, 2006.
- INLARCH(∞) QMLE, Latour, Truquet 2008.

$$X_t = \xi_t \Big(a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \circ X_{t-j} \Big)$$

- Random-INAR $X_t = a_t \circ X_{t-1} + \xi_t$, stationnaire (a_t) avec $\mathbb{E}(a_t | \mathcal{F}_{t-1}) < 1$.
- Poisson GLM $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_t)$ avec $\lambda_t = g(\lambda_{t-1}, X_{t-1}, \dots)$ avec Fokianos, Tjostheim, Moulines et Douc.

Ces modèles donnent lieu à une théorie limite dans les procédures d'estimation.

Applications

Applications

- Estimation
  - Méthode des moments (modèles bilinéaires entiers avec Latour, Oraichi),

Applications

- Estimation
  - Méthode des moments (modèles bilinéaires entiers avec Latour, Oraichi),
  - QMLE pour des modèles ARCH(∞), INLARCH(∞)(Bardet, Latour, Truquet, Wintenberger)

Applications

- Estimation
  - Méthode des moments (modèles bilinéaires entiers avec Latour, Oraichi),
  - QMLE pour des modèles ARCH(∞), INLARCH(∞)(Bardet, Latour, Truquet, Wintenberger)
  - Estimateur de Whittle, contraste: le périodogramme empirique (avec Bardet & León)

Applications

- Estimation

  - Méthode des moments (modèles bilinéaires entiers avec Latour, Oraichi),
  - QMLE pour des modèles ARCH(∞), INLARCH(∞)(Bardet, Latour, Truquet, Wintenberger)
  - Estimateur de Whittle, contraste: le périodogramme empirique (avec Bardet & León)
  - Estimation à noyau $X_n = f(X_{n-1}, \ldots, X_{n-p}) + \xi_n g(X_{n-1}, \ldots, X_{n-q})$ (avec Ango Nze, Dedecker, Louhichi, Prieur, Ragache, & Wintenberger), et prédiction...

Applications

- Estimation
  - Méthode des moments (modèles bilinéaires entiers avec Latour, Oraichi),
  - QMLE pour des modèles ARCH(∞), INLARCH(∞)(Bardet, Latour, Truquet, Wintenberger)
  - Estimateur de Whittle, contraste: le périodogramme empirique (avec Bardet & León)
  - Estimation à noyau $X_n = f(X_{n-1}, \ldots, X_{n-p}) + \xi_n g(X_{n-1}, \ldots, X_{n-q})$ (avec Ango Nze, Dedecker, Louhichi, Prieur, Ragache, & Wintenberger), et prédiction...
- Estimer une variance limite, qui apparaît dans les cas de dépendance faible (avec Jakubowicz, León, 2009)

Applications

- Estimation
  - Méthode des moments (modèles bilinéaires entiers avec Latour, Oraichi),
  - QMLE pour des modèles ARCH(∞), INLARCH(∞)(Bardet, Latour, Truquet, Wintenberger)
  - Estimateur de Whittle, contraste: le périodogramme empirique (avec Bardet & León)
  - Estimation à noyau $X_n = f(X_{n-1}, \ldots, X_{n-p}) + \xi_n g(X_{n-1}, \ldots, X_{n-q})$ (avec Ango Nze, Dedecker, Louhichi, Prieur, Ragache, & Wintenberger), et prédiction. . .
- Estimer une variance limite, qui apparaît dans les cas de dépendance faible (avec Jakubowicz, León, 2009)
- Bootstrap (**à modèle** avec Neumann 2008, Neumann, Paparoditis, 2006, **sauvage** avec Lang et Neumann, par **blocs** Kuensch, Neumann, Truquet)

Applications

- Estimation
  - Méthode des moments (modèles bilinéaires entiers avec Latour, Oraichi),
  - QMLE pour des modèles ARCH(∞), INLARCH(∞)(Bardet, Latour, Truquet, Wintenberger)
  - Estimateur de Whittle, contraste: le périodogramme empirique (avec Bardet & León)
  - Estimation à noyau $X_n = f(X_{n-1}, \ldots, X_{n-p}) + \xi_n g(X_{n-1}, \ldots, X_{n-q})$ (avec Ango Nze, Dedecker, Louhichi, Prieur, Ragache, & Wintenberger), et prédiction. . .
- Estimer une variance limite, qui apparaît dans les cas de dépendance faible (avec Jakubowicz, León, 2009)
- Bootstrap (**à modèle** avec Neumann 2008, Neumann, Paparoditis, 2006, **sauvage** avec Lang et Neumann, par **blocs** Kuensch, Neumann, Truquet)
- Parcimonie et algorithmes stochastiques, régression et estimation de densité (avec Alquier, 2011, avec Brandière)

Applications

- Estimation
  - Méthode des moments (modèles bilinéaires entiers avec Latour, Oraichi),
  - QMLE pour des modèles ARCH(∞), INLARCH(∞)(Bardet, Latour, Truquet, Wintenberger)
  - Estimateur de Whittle, contraste: le périodogramme empirique (avec Bardet & León)
  - Estimation à noyau $X_n = f(X_{n-1}, \ldots, X_{n-p}) + \xi_n g(X_{n-1}, \ldots, X_{n-q})$ (avec Ango Nze, Dedecker, Louhichi, Prieur, Ragache, & Wintenberger), et prédiction. . .
- Estimer une variance limite, qui apparaît dans les cas de dépendance faible (avec Jakubowicz, León, 2009)
- Bootstrap (**à modèle** avec Neumann 2008, Neumann, Paparoditis, 2006, **sauvage** avec Lang et Neumann, par **blocs** Kuensch, Neumann, Truquet)
- Parcimonie et algorithmes stochastiques, régression et estimation de densité (avec Alquier, 2011, avec Brandière)
- Processus ponctuels dépendants une définition de la dépendance pour ces modèles (avec Lang et Rosenbaum, en cours) permet de considérer des modèles de carnets d'ordre et s'applique au test d'homogénéité de Ripley

Sous-échantillonnage d'extrêmes

L'indice extrémal $\theta_X \in [0,1]$ et l'indice de Pareto $\alpha_X \in \mathbb{R}$ d'une série temporelle stationnaire (X_t) indiquent (la plupart du temps) le comportement asymptotique des extrêmes de ce processus

Sous-échantillonnage d'extrêmes

L'indice extrémal $\theta_X \in [0,1]$ et l'indice de Pareto $\alpha_X \in \mathbb{R}$ d'une série temporelle stationnaire (X_t) indiquent (la plupart du temps) le comportement asymptotique des extrêmes de ce processus

Les lois de Gumbel ($\alpha = 0$) nécessitent une estimation non paramétrique additionnelle!

Sous-échantillonnage d'extrêmes

L'indice extrémal $\theta_X \in [0,1]$ et l'indice de Pareto $\alpha_X \in \mathbb{R}$ d'une série temporelle stationnaire (X_t) indiquent (la plupart du temps) le comportement asymptotique des extrêmes de ce processus

Les lois de Gumbel ($\alpha = 0$) nécessitent une estimation non paramétrique additionnelle!

L'asymptotique dictée par de nombreuses références (eg. O'Brien, 1987) est donnée (si $\alpha_X \neq 0$) par des suites dépendant fortement de ces indices u_b, v_v

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1 \le i \le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}_{\alpha_X}^{\theta_X}(x)$$

Sous-échantillonnage d'extrêmes

L'indice extrémal $\theta_X \in [0,1]$ et l'indice de Pareto $\alpha_X \in \mathbb{R}$ d'une série temporelle stationnaire (X_t) indiquent (la plupart du temps) le comportement asymptotique des extrêmes de ce processus

Les lois de Gumbel ($\alpha = 0$) nécessitent une estimation non paramétrique additionnelle!

L'asymptotique dictée par de nombreuses références (eg. O'Brien, 1987) est donnée (si $\alpha_X \neq 0$) par des suites dépendant fortement de ces indices u_b, v_v

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1\le i\le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}_{\alpha_X}^{\theta_X}(x)$$

Ici $\mathbb{G}_0(x) = \exp(-\exp(-x))$ et $\mathbb{G}_\alpha(x) = \exp(-(1+\alpha x)_+^{-1/\alpha})$ lorsque $\alpha \neq 0$.

Sous-échantillonnage d'extrêmes

L'indice extrémal $\theta_X \in [0,1]$ et l'indice de Pareto $\alpha_X \in \mathbb{R}$ d'une série temporelle stationnaire (X_t) indiquent (la plupart du temps) le comportement asymptotique des extrêmes de ce processus

Les lois de Gumbel ($\alpha = 0$) nécessitent une estimation non paramétrique additionnelle!

L'asymptotique dictée par de nombreuses références (eg. O'Brien, 1987) est donnée (si $\alpha_X \neq 0$) par des suites dépendant fortement de ces indices u_b, v_v

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1\le i\le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}_{\alpha_X}^{\theta_X}(x)$$

Ici $\mathbb{G}_0(x) = \exp(-\exp(-x))$ et $\mathbb{G}_\alpha(x) = \exp(-(1+\alpha x)_+^{-1/\alpha})$ lorsque $\alpha \neq 0$.

Sous échantillonner donne un intervalle de confiance pour les valeurs extrêmes

Les quantités directement estimables sont les VaR ou autres Expected Short Fall qui sont des critères financiers standards.

Sous-échantillonnage d'extrêmes

L'indice extrémal $\theta_X \in [0,1]$ et l'indice de Pareto $\alpha_X \in \mathbb{R}$ d'une série temporelle stationnaire (X_t) indiquent (la plupart du temps) le comportement asymptotique des extrêmes de ce processus

Les lois de Gumbel ($\alpha = 0$) nécessitent une estimation non paramétrique additionnelle!

L'asymptotique dictée par de nombreuses références (eg. O'Brien, 1987) est donnée (si $\alpha_X \neq 0$) par des suites dépendant fortement de ces indices u_b, v_v

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1 \le i \le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}_{\alpha_X}^{\theta_X}(x)$$

Ici $\mathbb{G}_0(x) = \exp(-\exp(-x))$ et $\mathbb{G}_\alpha(x) = \exp(-(1+\alpha x)_+^{-1/\alpha})$ lorsque $\alpha \neq 0$.

Sous échantillonner donne un intervalle de confiance pour les valeurs extrêmes

Les quantités directement estimables sont les VaR ou autres Expected Short Fall qui sont des critères financiers standards.

Le travail nécessaire est réalisé en deux temps.

Sous échantillonnage: suites de statistiques convergentes

Si la suite $T_b = t_b(X_1, \ldots, X_b)$ converge, elle peut être sous échantillonnée par

Sous échantillonnage: suites de statistiques convergentes

Si la suite $T_b = t_b(X_1, \dots, X_b)$ converge, elle peut être sous échantillonnée par

$$\frac{1}{n - b_n + 1} \sum_{i=0}^{n-b_n} \mathbb{1}_{\{T_{b_n,i} \le x\}}, \qquad T_{b_n,i} = t_{b_n}(X_{i+1}, \dots, X_{i+b_n})$$

Sous échantillonnage: suites de statistiques convergentes

Si la suite $T_b = t_b(X_1, \ldots, X_b)$ converge, elle peut être sous échantillonnée par

$$\frac{1}{n-b_n+1}\sum_{i=0}^{n-b_n} 1\!\!1_{\{T_{b_n,i}\le x\}}, \qquad T_{b_n,i} = t_{b_n}(X_{i+1}, \ldots, X_{i+b_n})$$

$$\frac{b_n}{n-b_n+1}\sum_{i=0}^{n/b_n-1} 1\!\!1_{\{T_{b_n,i}\le x\}}, \qquad T_{b_n,i} = t_{b_n}(X_{ib_n+1}, \ldots, X_{(i+1)b_n})$$

Sous échantillonnage: suites de statistiques convergentes

Si la suite $T_b = t_b(X_1, \ldots, X_b)$ converge, elle peut être sous échantillonnée par

$$\frac{1}{n - b_n + 1} \sum_{i=0}^{n-b_n} \mathbb{1}_{\{T_{b_n,i} \le x\}}, \qquad T_{b_n,i} = t_{b_n}(X_{i+1}, \ldots, X_{i+b_n})$$

$$\frac{b_n}{n - b_n + 1} \sum_{i=0}^{n/b_n - 1} \mathbb{1}_{\{T_{b_n,i} \le x\}}, \qquad T_{b_n,i} = t_{b_n}(X_{ib_n+1}, \ldots, X_{(i+1)b_n})$$

On peut remplacer $t \mapsto \mathbb{1}_{t \le x}$ par une approximation de l'unité continue et $1/\epsilon_n-$Lipschitzienne.

Sous échantillonnage: suites de statistiques convergentes

Si la suite $T_b = t_b(X_1, \ldots, X_b)$ converge, elle peut être sous échantillonnée par

$$\frac{1}{n-b_n+1}\sum_{i=0}^{n-b_n} \mathbb{1}_{\{T_{b_n,i}\le x\}}, \qquad T_{b_n,i} = t_{b_n}(X_{i+1}, \ldots, X_{i+b_n})$$

$$\frac{b_n}{n-b_n+1}\sum_{i=0}^{n/b_n-1} \mathbb{1}_{\{T_{b_n,i}\le x\}}, \qquad T_{b_n,i} = t_{b_n}(X_{ib_n+1}, \ldots, X_{(i+1)b_n})$$

On peut remplacer $t \mapsto \mathbb{1}_{t\le x}$ par une approximation de l'unité continue et $1/\epsilon_n-$Lipschitzienne.

Evaluer des moments centrés d'ordre supérieur permet aussi de déduire des propriétés de convergence uniforme presque sûre.

Renormalisation (Doukhan, Prohl, Robert)

Le cas divergent $T_b = t_b(x_1, \ldots, x_b) = \max\{x_1, \ldots, x_b\}$ requiert une attention particulière que nous évoquerons par l'exemple essentiel de la loi des extrêmes.

Renormalisation (Doukhan, Prohl, Robert)

Le cas divergent $T_b = t_b(x_1, \ldots, x_b) = \max\{x_1, \ldots, x_b\}$ requiert une attention particulière que nous évoquerons par l'exemple essentiel de la loi des extrêmes.

Supposons que l'on est dans la situation:

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1\le i\le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}_{\alpha_X}^{\theta_X}(x),$$

Renormalisation (Doukhan, Prohl, Robert)

Le cas divergent $T_b = t_b(x_1, \ldots, x_b) = \max\{x_1, \ldots, x_b\}$ requiert une attention particulière que nous évoquerons par l'exemple essentiel de la loi des extrêmes.

Supposons que l'on est dans la situation:

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1\le i\le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}_{\alpha_x}^{\theta_x}(x),$$

alors, avec $\widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}(x) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{t_b(Y_{b,i}) - x}{\epsilon_n}\right)$,

on pose $\widehat{v}_{b,n} = \widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\widehat{u}_{b,n} = \left(\widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}(t_2) - \widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}(t_1)\right)^{-1}$ pour estimer v_b et u_b

Renormalisation (Doukhan, Prohl, Robert)

Le cas divergent $T_b = t_b(x_1, \ldots, x_b) = \max\{x_1, \ldots, x_b\}$ requiert une attention particulière que nous évoquerons par l'exemple essentiel de la loi des extrêmes.

Supposons que l'on est dans la situation:

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1 \le i \le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}_{\alpha_x}^{\theta_x}(x),$$

alors, avec $\widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}(x) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{t_b(Y_{b,i}) - x}{\epsilon_n}\right)$,

on pose $\widehat{v}_{b,n} = \widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\widehat{u}_{b,n} = \left(\widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}(t_2) - \widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}(t_1)\right)^{-1}$ pour estimer v_b et u_b

on utilisera ici les normalisations $\mathbb{K}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ médiane nulle

Renormalisation (Doukhan, Prohl, Robert)

Le cas divergent $T_b = t_b(x_1, \ldots, x_b) = \max\{x_1, \ldots, x_b\}$ requiert une attention particulière que nous évoquerons par l'exemple essentiel de la loi des extrêmes.

Supposons que l'on est dans la situation:

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1\le i\le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}_{\alpha_x}^{\theta_x}(x),$$

alors, avec $\widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}(x) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{t_b(Y_{b,i}) - x}{\epsilon_n}\right)$,

on pose $\widehat{v}_{b,n} = \widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\widehat{u}_{b,n} = \left(\widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}(t_2) - \widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}^{-1}(t_1)\right)^{-1}$ pour estimer v_b et u_b

on utilisera ici les normalisations $\mathbb{K}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ médiane nulle

$C = \mathbb{K}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \mathbb{K}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ espace interquartiles fixé

Renormalisation (Doukhan, Prohl, Robert)

Le cas divergent $T_b = t_b(x_1, \dots, x_b) = \max\{x_1, \dots, x_b\}$ requiert une attention particulière que nous évoquerons par l'exemple essentiel de la loi des extrêmes.

Supposons que l'on est dans la situation:

$$\mathbb{P}\left(u_b \max_{1\le i\le b} X_i - v_b \le x\right) \to \mathbb{K}(x) \equiv \mathbb{G}^{\theta_x}_{\alpha_x}(x),$$

alors, avec $\widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{t_b(Y_{b,i}) - x}{\epsilon_n}\right)$,

on pose $\widehat{v}_{b,n} = \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_{b,n}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\widehat{u}_{b,n} = \left(\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_{b,n}(t_2) - \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}_{b,n}(t_1)\right)^{-1}$ pour estimer v_b et u_b

on utilisera ici les normalisations $\mathbb{K}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ médiane nulle

$C = \mathbb{K}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \mathbb{K}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ espace interquartiles fixé

À présent

$$\widetilde{\mathbb{H}}_{b,n}\left(\widehat{v}_{b,n} + \frac{x}{\widehat{u}_{b,n}}\right) \to_{n\to\infty} \mathbb{K}\left(\frac{x}{C}\right), \qquad (b = b(n) \to \infty \quad \text{de manière raisonnable})$$

la convergence a lieu uniformément en probabilité (ou presque sûrement)

Simulations

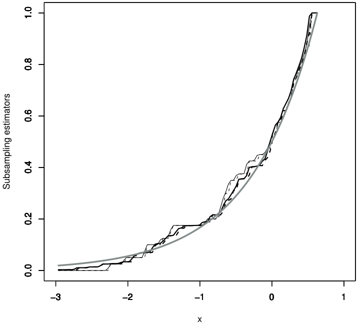
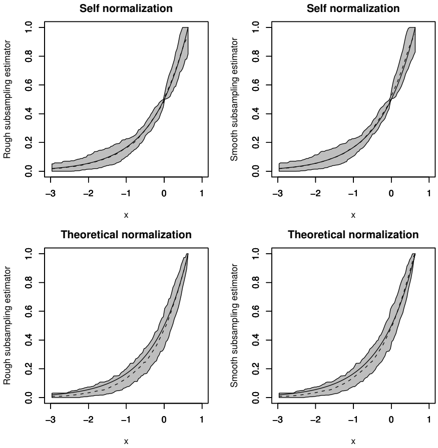


Figure: $X_t = (X_{t-1} + \xi_t)/r$, ξ uniforme sur $\{0, \dots, r\}$.

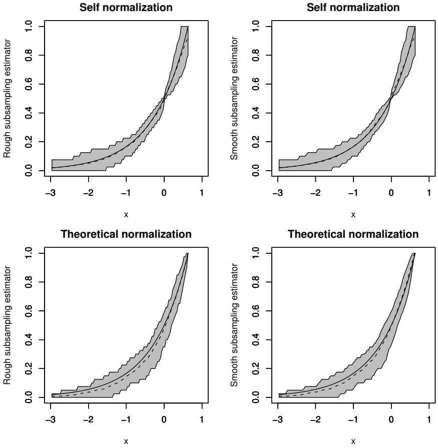
Ce modèle ne satisfait les conditions générique d'un comportement extrémal standard mais ses maxima ont des lois explicitement calculables et, ici $\theta_X = 1 - 1/r$.

Simulations/Overlaping

Les méthodes de sous-échantillonnage *rough* et *smooth* sont envisagées dans les cas overlaping ou non, avec une renormalisation automatique ou pas.

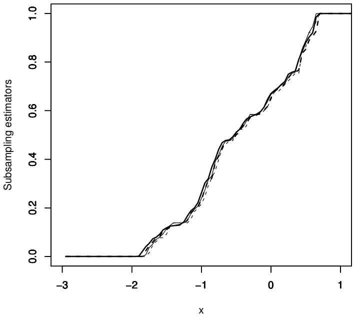


Simulations/Non-overlaping



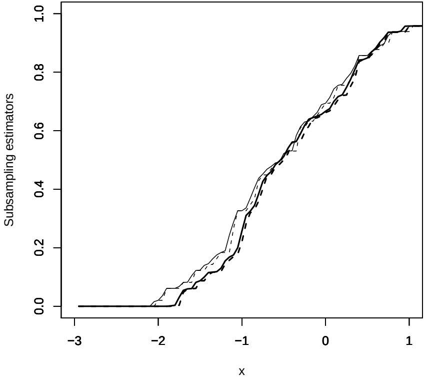
Les conséquences à en tirer semblent être que la perte due à la renormalisation automatique est acceptable et que la méthode overlaping qui donne des échantillons de taille supérieure est plutôt meilleure.

Données de consommation EDF



Interprétation incertaine...
Le domaine d'attraction des valeurs extrêmes semble être à support compact ce qui semble arguer pour des variables bornées!
Un prétraitement pour stationnariser les données utilisera les techniques dérivées du cycle NonStationnarité/Risques à Cergy-2012, plutôt que les techniques de filtrage standard.

Données de prix EDF



Les prix n'ont apparemment pas le même défaut, les raisons en sont mutiples: faible concurrence, spécificité du stockage de l'électricité, crise...

Malheureusement pour le consommateur!

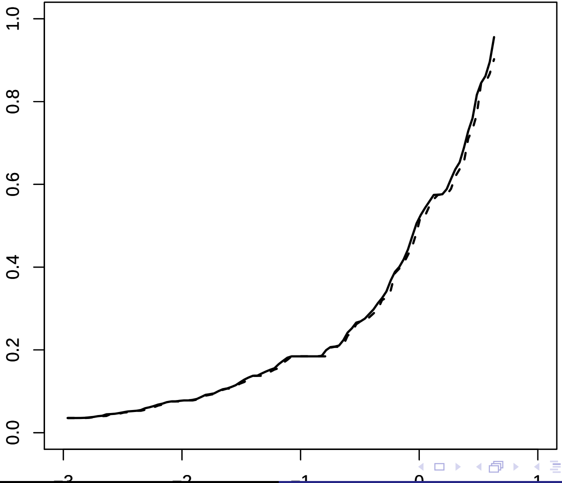
Estimer l'indice extrémal

Avec Johann Segers et Xiaoyin Li (travail en cours), nous rompons la dépendance en sous-échantillonnant une suite de statistiques $t_b(X_1, \ldots, x_b)$:

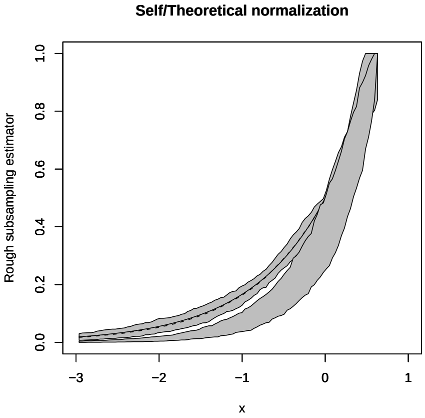
$$\frac{1}{N(n, b_n)} \sum \mathbb{1}_{\{t_b(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{b_n}}) \leq x\}}, \quad 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{b_n} \leq n$$

dans ce cas de *rough subsampling*, en notant $N(n, b_n) = \binom{n}{b_n}$,
Pour le cas autonormalisé, comme auparavant, une loi limite $\mathbb{G}$ apparaît au lieu de $\mathbb{G}^{\theta x}$ dans le cadre antérieur (compte tenu des normalisations, la correspondance est en fait un peu plus complexe).
L'usage simultané de ces deux procédures donne lieu à un test d'hypothèse sur la valeur de l'indice extrémal.
Techniquement la statistique précédente n'est pas manipulable car le nombre $N(n, b_n)$ est énorme: la sommation est alors remplacée par une somme sur un ensemble de parties ordonnées de $\{1, \ldots, n\}$ tiré au hasard de manière uniforme dans cet ensemble de cardinal $N(n, b_n)$.
Un travail théorique reste nécessaire pour justifier ces heuristiques.

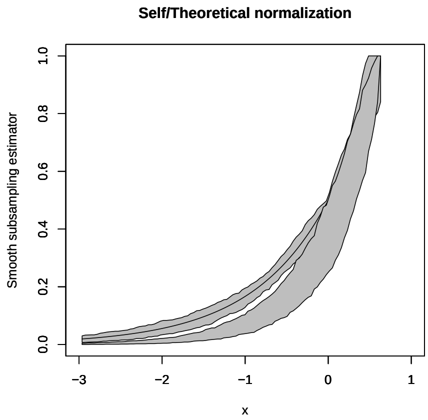
Sous échantillonnage: en cassant la dépendance



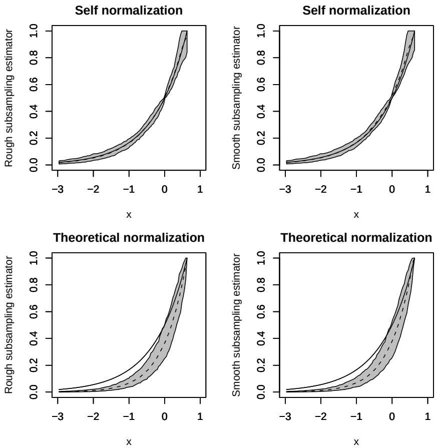
Comparaison des méthodes ‘Rough’



Comparaison des méthodes ‘Smooth’



L'indice extrémal, en pratique



Les deux procédures, utilisées conjointement, permettent de tester l'hypothèse $\theta_X = 1 - 1/r$ sur le modèle AR non mélangeant évoqué au début.

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg
  - pour des moments d'ordre $(2+\delta)$, Doukhan & Wintenberger étendent un argument d'Ibragimov (1975)

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg
  - pour des moments d'ordre $(2+\delta)$, Doukhan & Wintenberger étendent un argument d'Ibragimov (1975)
- Inégalités exponentielles

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg
  - pour des moments d'ordre $(2+\delta)$, Doukhan & Wintenberger étendent un argument d'Ibragimov (1975)
- Inégalités exponentielles
  - Bernstein (cas iid) $\mathbb{P}(S_n \geq t\sqrt{n}) \leq C \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2 + K\frac{t}{\sqrt{n}}}\right\}$

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg
  - pour des moments d'ordre $(2+\delta)$, Doukhan & Wintenberger étendent un argument d'Ibragimov (1975)
- Inégalités exponentielles
  - Bernstein (cas iid) $\mathbb{P}(S_n \geq t\sqrt{n}) \leq C \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2+K\frac{t}{\sqrt{n}}}\right\}$
  - Doukhan, Louhichi (méthode combinatoire) $\leq Ce^{-c\sqrt{t}}$,

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg
  - pour des moments d'ordre $(2+\delta)$, Doukhan & Wintenberger étendent un argument d'Ibragimov (1975)
- Inégalités exponentielles
  - Bernstein (cas iid) $\mathbb{P}(S_n \geq t\sqrt{n}) \leq C \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2 + K\frac{t}{\sqrt{n}}}\right\}$
  - Doukhan, Louhichi (méthode combinatoire) $\leq Ce^{-c\sqrt{t}}$,
  - Doukhan, Neumann: techniques de cumulants $\leq C \exp\left\{-\dfrac{t^2}{2\sigma^2 + K(t/\sqrt{n})^\alpha}\right\}$,

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg
  - pour des moments d'ordre $(2+\delta)$, Doukhan & Wintenberger étendent un argument d'Ibragimov (1975)
- Inégalités exponentielles
  - Bernstein (cas iid) $\mathbb{P}(S_n \geq t\sqrt{n}) \leq C \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2 + K\frac{t}{\sqrt{n}}}\right\}$
  - Doukhan, Louhichi (méthode combinatoire) $\leq Ce^{-c\sqrt{t}}$,
  - Doukhan, Neumann: techniques de cumulants $\leq C \exp\left\{-\dfrac{t^2}{2\sigma^2 + K(t/\sqrt{n})^\alpha}\right\}$,
  - Rio (2000), Dedecker (1999) étendent l'inégalité maximale de Nagaev-Fuk

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg
  - pour des moments d'ordre $(2+\delta)$, Doukhan & Wintenberger étendent un argument d'Ibragimov (1975)
- Inégalités exponentielles
  - Bernstein (cas iid) $\mathbb{P}(S_n \geq t\sqrt{n}) \leq C \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2 + K\frac{t}{\sqrt{n}}}\right\}$
  - Doukhan, Louhichi (méthode combinatoire) $\leq Ce^{-c\sqrt{t}}$,
  - Doukhan, Neumann: techniques de cumulants $\leq C \exp\left\{-\dfrac{t^2}{2\sigma^2 + K(t/\sqrt{n})^\alpha}\right\}$,
  - Rio (2000), Dedecker (1999) étendent l'inégalité maximale de Nagaev-Fuk
  - Dedecker & Prieur utilisent un argument de couplage en cas de causalité.

Théorie limite et consistances

- Inégalités de moments
  - pour des moments entiers, méthode combinatoire, Doukhan & Louhichi
  - pour des coefficients causaux, Louhichi et Prieur utilisent la méthode de Rio-Lindeberg
  - pour des moments d'ordre $(2+\delta)$, Doukhan & Wintenberger étendent un argument d'Ibragimov (1975)
- Inégalités exponentielles
  - Bernstein (cas iid) $\mathbb{P}(S_n \geq t\sqrt{n}) \leq C \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2 + K\frac{t}{\sqrt{n}}}\right\}$
  - Doukhan, Louhichi (méthode combinatoire) $\leq Ce^{-c\sqrt{t}}$,
  - Doukhan, Neumann: techniques de cumulants $\leq C \exp\left\{-\dfrac{t^2}{2\sigma^2 + K(t/\sqrt{n})^\alpha}\right\}$,
  - Rio (2000), Dedecker (1999) étendent l'inégalité maximale de Nagaev-Fuk
  - Dedecker & Prieur utilisent un argument de couplage en cas de causalité.
  - Rio, Merlevède and Peligrad (2010) pour une méthode projective.

Limites en loi et tests asymptotiques I

A) Principe d'invariance de Donsker,

Limites en loi et tests asymptotiques I

A) Principe d'invariance de Donsker,

X_n stationnaire, $\mathbb{E}X_0 = 0$, $\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_0, X_k) \geq 0$ (bien définie), alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k \xrightarrow{D[0,1]}_{n\to\infty} \sigma W_t$$

sous l'une des conditions suivantes

Limites en loi et tests asymptotiques I

A) Principe d'invariance de Donsker,

X_n stationnaire, $\mathbb{E}X_0 = 0$, $\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_0, X_k) \geq 0$ (bien définie), alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k \xrightarrow{D[0,1]}_{n\to\infty} \sigma W_t$$

sous l'une des conditions suivantes

- $\mathbb{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty$, $\lambda(i) = O(i^{-a})$ pour $a > 2 + 2/\delta$

Limites en loi et tests asymptotiques I

A) Principe d'invariance de Donsker,

X_n stationnaire, $\mathbb{E}X_0 = 0$, $\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_0, X_k) \geq 0$ (bien définie), alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k \xrightarrow{D[0,1]}_{n\to\infty} \sigma W_t$$

sous l'une des conditions suivantes

- $\mathbb{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty$, $\lambda(i) = O(i^{-a})$ pour $a > 2 + 2/\delta$
- $\mathbb{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty, \sum_{i>0} i^{1/\delta}\theta(i) < \infty$,

Limites en loi et tests asymptotiques I

A) Principe d'invariance de Donsker,

X_n stationnaire, $\mathbb{E}X_0 = 0$, $\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_0, X_k) \geq 0$ (bien définie), alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k \xrightarrow{D[0,1]}_{n\to\infty} \sigma W_t$$

sous l'une des conditions suivantes

- $\mathbb{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty$, $\lambda(i) = O(i^{-a})$ pour $a > 2 + 2/\delta$
- $\mathbb{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty, \sum_{i>0} i^{1/\delta}\theta(i) < \infty$,
- $\mathbb{E}|X_0|^2 \log_+ |X_0| < \infty$, $\theta(i) = O(a^i)$ pour un $0 < a < 1$.

Limites en loi et tests asymptotiques I

A) Principe d'invariance de Donsker,

X_n stationnaire, $\mathbb{E}X_0 = 0$, $\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_0, X_k) \geq 0$ (bien définie), alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k \xrightarrow{D[0,1]}_{n\to\infty} \sigma W_t$$

sous l'une des conditions suivantes

- $\mathbb{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty$, $\lambda(i) = O(i^{-a})$ pour $a > 2 + 2/\delta$
- $\mathbb{E}|X_0|^{2+\delta} < \infty, \sum_{i>0} i^{1/\delta}\theta(i) < \infty$,
- $\mathbb{E}|X_0|^2 \log_+ |X_0| < \infty$, $\theta(i) = O(a^i)$ pour un $0 < a < 1$.

Dedecker, Doukhan, Louhichi, Prieur, Wintenberger

Limites en loi et tests asymptotiques II

B) TLC Empirique

X_n stationnaire, alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{1}(X_k \le x) - F(x)) \xrightarrow{D[\overline{\mathbb{R}}]}_{n\to\infty} Z(x)$

$(Z(x))_{x\in\mathbb{R}}$ processus Gaussien centré, de covariance:

$$\Gamma(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(\mathbf{1}(X_0 \le x), \mathbf{1}(X_k \le y))$$

si $F(x) \equiv x$, et sous une condition de dépendance faible

Limites en loi et tests asymptotiques II

B) TLC Empirique

X_n stationnaire, alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{1}(X_k \leq x) - F(x)) \xrightarrow{D[\overline{\mathbb{R}}]}_{n\to\infty} Z(x)$

$(Z(x))_{x\in\mathbb{R}}$ processus Gaussien centré, de covariance:

$$\Gamma(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(\mathbf{1}(X_0 \leq x), \mathbf{1}(X_k \leq y))$$

si $F(x) \equiv x$, et sous une condition de dépendance faible

- $\theta(i) = O(i^{-a})$ pour $a > 1$ (Dedecker & Prieur)

Limites en loi et tests asymptotiques II

B) TLC Empirique

X_n stationnaire, alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{1}(X_k \leq x) - F(x)) \xrightarrow{D[\overline{\mathbb{R}}]}_{n\to\infty} Z(x)$

$(Z(x))_{x\in\mathbb{R}}$ processus Gaussien centré, de covariance:

$$\Gamma(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(\mathbf{1}(X_0 \leq x), \mathbf{1}(X_k \leq y))$$

si $F(x) \equiv x$, et sous une condition de dépendance faible

- $\theta(i) = O(i^{-a})$ pour $a > 1$ (Dedecker & Prieur)
- $\lambda(i) = O(i^{-a})$, $a > 15/2$ (si il y a association: $a > 4$ suffit: Louhichi))

Références

- Andrews, D. (1984) *Non strong mixing autoregressive processes.* J. Appl. Probab. 21, 930-934.
- Dedecker, J., Doukhan, P., León, J. R., Lang, G., Louhichi, S., Prieur, C. (2007) *Weak dependence: models, theory and applications.* Lecture Notes in Statistics 190, Springer-Verlag.
- Doukhan, P. (1994) *Mixing: Properties and Examples.* LNS 85. Springer Verlag.
- Bertail, P., Doukhan, P., Prohl, S., Robert, C. *Subsampling extremes of weakly dependent sequences.* In preparation.
- Doukhan, P., Jakubowicz, J., León, J.R. *Estimation of the limit variance for sums of $\lambda-$dependent vector valued sequences*. In preparation.
- Leadbetter, M. R., Lindgren, G., Rootzen, H. (1983) *Extremes and related properties of random sequences and processes.* Springer Series in Statistics.
- Martins, A.P., Ferreira, H. (2005) *The multivariate extremal index and the dependence structure of a multivariate extreme value distribution.* Test 14, 433–448.
- Rio, E. (2000) *Théorie asymptotique pour des processus aléatoires faiblement dépendants,* SMAI, Mathématiques et Applications 31, Springer.