Couverture en CVaR par algorithme stochastique et quantification vectorielle optimale

N. Frikha, [1] G. Pagès, [2] O. Bardou. [3]

Séminaire FIME, 21 Octobre 2011

1. CMAP, Ecole Polytechnique, e-mail: noufel.frikha@cmap.polytechnique.fr
2. LPMA, Université Pierre & Marie Curie Paris VI. e-mail: gilles.pages@upmc.fr
3. LPMA, Université Pierre & Marie Curie Paris VI, Direction Financière GDF-Suez, e-mail: olivier.bardou@gdfsuez.com

Plan

Outlines

Couverture du risque : pourquoi ?

▷ Dans un marché complet, si L est mesurable par rapport à la filtration de marché :

$$L = \mathbb{E}[L] + \int_0^T \phi_s.\mathrm{d}S_s, \ \text{p.s.}$$

▷ Pourtant, les marchés de l'énergie (gaz, électricité, ...) et les marchés financiers sont incomplets

- volatilité stochastique,
- Pics de prix sur les contrats spot ou *day-ahead*,
- Dépendance dans L par rapport au climat : température, ...

▷ Quelques solutions :

- Sur-couverture : N. El-Karoui, M.-C.Quenez, 1995, ...
- Maximisation de l'utilité espérée : S.D. Hodges & al., 1989, I. Karatzas & al., 1991, N. El Karoui & al., 2000,...
- Minimisation du risque quadratique : H. Foellmer, D. Sonderman, 1986, M. Schweizer, 1991, ...

Motivation et notations

Temps discret : $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_M = T$

Source d'incomplétude

L contient une source de risque $Z := (Z_\ell)_{0\le\ell\le M}$ *observable* mais *non-négociable* sur le marché.

- ▷ d actifs négociables $X = (X_\ell)_{0\le\ell\le M}$, X_ℓ v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
- ▷ Filtration : $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_\ell)_{0\le\ell\le M}$, $\mathcal{G}_\ell := \sigma\{X_i, Z_i; 0 \le i \le \ell\}$.
- ▷ Exemple : fournisseur d'énergie
  - achète une quantité aléatoire de gaz C_M au prix S^g_M,
  - la vend à ses clients au prix fixe K,
  - $Z := (Z_\ell)_{0\le\ell\le M}$, température.

$$L = (S^g_M - K) \times C_M,$$

où

$$C_M = a - bZ_M, \quad \mathrm{d}Z_t = -\lambda(Z_t - \mu_t)\mathrm{d}t + \sigma_Z \mathrm{d}W_t.$$

Risque statique et dynamique

$$\xi_\alpha^* := \mathrm{VaR}_\alpha(L), \text{ où } \mathbb{P}\left(L \leq \xi_\alpha^*\right) = \alpha, \text{ et }, \mathrm{CVaR}_\alpha(L) := \mathbb{E}\left[L | L \geq \xi_\alpha^*\right].$$

Proposition : Rockafellar, Uryasev, (2000).

$\mathbb{E}\left[L_+\right] < +\infty$ et F_L (strictement) croissante.

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(L) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \xi + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[(L-\xi)_+\right] = \xi_\alpha^* + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[(L-\xi_\alpha^*)_+\right]$$

Définition : Bardou, Frikha, Pagès (2009).

Si L vérifie $\mathbb{E}\left[L_+ \mid \mathcal{G}_\ell\right] < +\infty$ p.s.

$$\mathcal{G}_\ell\text{-}\mathrm{CVaR}_\alpha(L) := \operatorname*{ess\,inf}_{\xi \in L^0_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}_\ell)} \xi + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[(L-\xi)_+ | \mathcal{G}_\ell\right].$$

sous-add., pos. homogène, invar. trans. et monotone.

Outlines

Couverture en CVaR à l'aide de stratégies autofinancées

Stratégie à un pas vs. Stratégie dynamique

▷ $\mathcal{A} = \left\{\theta = (\theta_\ell)_{0\le\ell\le M-1}, \theta_\ell \in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_\ell, \mathbb{P})\right\}$:

- Stratégie dynamique, M rebalancements, gain $\sum_{\ell=1}^M \theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell$.
- Stratégie un pas, un rebalancement en ℓ_0 : $\theta_k \equiv \theta_{\ell_0}$, $k = \ell_0, \cdots, M$, gain $\theta_{\ell_0}.(X_M - X_{\ell_0})$.

▷ Couverture dynamique du risque statique :

$$\inf_{\theta\in\mathcal{A}} \mathrm{CVaR}_\alpha\left(L - \sum_{\ell=1}^{M} \theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell\right),$$

▷ Couverture à un pas du risque statique :

$$\inf_{\theta_{\ell_0}\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} \mathrm{CVaR}_\alpha\left(L - \theta_{\ell_0}.(X_M - X_{\ell_0})\right),$$

▷ Couverture à un pas du risque forward :

$$\inf_{\theta_{\ell_0}\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_{\ell_0}\text{-}\mathrm{CVaR}_\alpha\left(L - \theta_{\ell_0}.(X_M - X_{\ell_0})\right)\right].$$

Existence de stratégie optimale

Le cas des stratégies à un pas

$\triangleright$ Notons $X = X_M - X_{\ell_0}$. On considère une version régulière de la loi conditionnelle de (L, X) sachant $\mathcal{G}_{\ell_0}$: $\Pi(\omega, dy, dx)$.

Hypothèses

- $L \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{P})$, $X \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{P})$
- $\operatorname{ess\,inf}_{u \in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0}, \mathbb{P}),\ |u|=1} \mathbb{E}\left[(u.X)_+ \mid \mathcal{G}_{\ell_0}\right] > 0 \ p.s.$

$V : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ defined by

$$V(\omega, \xi, \theta) = \int \underbrace{\xi + \frac{1}{1-\alpha}(y - \theta.x - \xi)_+}_{v(\xi,\theta,y,x)} \Pi(\omega, dx, dy)$$

Existence de stratégie optimale

Il existe une stratégie optimale $(\xi^*_{\alpha,2}, \theta^*_{\alpha,2}) \in \mathbb{R} \times L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})$ (resp. $(\xi^*_{\alpha,3}, \theta^*_{\alpha,3}) \in L^0_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}_{\ell_0}) \times L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})$).

Eléments de la preuve

On cherche à résoudre :

$$\inf_{\theta \in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} \mathrm{CVaR}_\alpha (L - \theta.X)$$

$$= \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \inf_{\theta \in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} \mathbb{E}\left[\xi + \frac{1}{1-\alpha}(L - \theta.X - \xi)_+\right]$$

Eléments de la preuve

Résultat de contrôle stochastique

$$\inf_{\theta\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} \mathrm{CVaR}_\alpha\,(L-\theta.X)$$

$$= \inf_{\xi\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\operatorname*{ess\,inf}_{\theta\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} \mathbb{E}\left[\xi+\frac{1}{1-\alpha}(L-\theta.X-\xi)_+\middle|\mathcal{G}_{\ell_0}\right]\right]$$

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\theta\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} \mathbb{E}\left[\xi+\frac{1}{1-\alpha}(L-\theta.X-\xi)_+\middle|\mathcal{G}_{\ell_0}\right](\omega) = \min_{\theta\in\mathbb{R}^d} V(\omega,\xi,\theta)$$

$$= V(\omega,\xi,\tilde{\theta}_\alpha)\quad p.s.$$

$\triangleright$ $V(\omega,\xi,.)$ est convexe, Lipschitz, $\lim_{|\theta|\to+\infty} V(\xi,\theta)=+\infty$.

Eléments de la preuve

Maintenant, on cherche à résoudre

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[V(\xi,\tilde{\theta}_\alpha)\right] = \inf_{\xi\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\operatorname*{ess\,inf}_{\theta\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} V(\xi,\theta)\right]$$

$\triangleright$ $\xi \mapsto \mathbb{E}\left[\operatorname{ess\,inf}_{\theta\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} V(\xi,\theta)\right]$ est Lipschitz, convexe, et $\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathbb{E}\left[\operatorname{ess\,inf}_{\theta\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0})} V(\xi,\theta)\right] = +\infty$ (uniformément en θ !).

$\triangleright$ Il existe $(\xi^*_{\alpha,2},\theta^*_{\alpha,2})$ solution du problème à un pas. $V(\omega,\xi,.)$ est différentiable :

$$\operatorname{Arg\,min} V(\omega,\xi,.) = \left\{\theta\in\mathbb{R}^d \mid \nabla_\theta V(\omega,\xi,\theta)=0\right\} \neq \varnothing,$$

Couverture dynamique du risque statique

$$\inf_{\theta\in\mathcal{A}} \mathrm{CVaR}_\alpha \left(L - \sum_{\ell=1}^{M} \theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell \right)$$
$$= \inf_{\xi\in\mathbb{R}} \inf_{\theta\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\xi + \frac{1}{1-\alpha}\left(L - \sum_{\ell=1}^{M} \theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell - \xi \right)_+ \right]$$

Hypothèses

- $L \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{P})$, $\Delta X_\ell \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{P})$, $\ell = 1, \cdots, M$
- $\operatorname{ess\,inf}_{u\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell-1},\mathbb{P}),\ |u|=1} \mathbb{E}\left[(u.\Delta X_\ell)_+ \mid \mathcal{G}_{\ell-1}\right] > 0 \ p.s.$

Existence de stratégies optimales

En utilisant les idées du principe de la programmation dynamique (fonctions de Bellman, résolution backward, ...), on montre l'existence d'une stratégie optimale.

Comment le risque évolue au cours du temps ?

Les (bonnes) propriétés de la $\mathcal{G}$-CVaR

▷ Le risque du portefeuille à la date ℓ :

$$\mathcal{G}_\ell\text{-CVaR}_\alpha\left(L - \sum_{k=1}^{M} \theta_{k-1}.\Delta X_k\right), \quad \ell = 0, \cdots, M.$$

Surmartingale & Convergence

Soit $M = +\infty$ et $L \in L^1(\mathcal{G}_\infty, \mathbb{P})$ où $\mathcal{G}_\infty = \vee_\ell \mathcal{G}_\ell$.

1. $(\mathcal{G}_\ell\text{-CVaR}_\alpha(L))_{\ell \geq 0}$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-surmartingale.
2. $\mathcal{G}_n\text{-CVaR}_\alpha(L) \xrightarrow{p.s.} L, \ n \to +\infty$.

Le risque dynamique est cohérent

L'estimation à la date 0 du risque dynamique : $(\mathbb{E}\left[\mathcal{G}_\ell\text{-CVaR}_\alpha(L)\right])_{1 \leq \ell \leq M}$ décroit avec le temps ! Le risque aléatoire décroit jusque L.

Evolution du risque du portefeuille dynamique

Proposition

Si X est une $(\mathbb{G},\mathbb{P})$-martingale. Alors

$$\mathcal{G}_k\text{-CVaR}_\alpha\left(L-\sum_{\ell=1}^{M}\theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell\right)=\sum_{\ell=1}^{k}\theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell + \mathcal{G}_k\text{-CVaR}_\alpha\left(L-\sum_{\ell=k+1}^{M}\theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell\right).$$

et,

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{G}_k\text{-CVaR}_\alpha\left(L-\sum_{\ell=1}^{M}\theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_k\text{-CVaR}_\alpha\left(L-\sum_{\ell=k+1}^{M}\theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell\right)\right].$$

Outlines

Méthode numériques : algorithme stochastique

Couverture à un pas du risque forward

On veut résoudre le problème à un pas du risque forward :

$$\inf_{\theta_{\ell_0}\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0},\mathbb{P})} \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_{\ell_0}\text{-CVaR}_\alpha\left(L-\theta_{\ell_0}.(X_M - X_{\ell_0})\right)\right].$$

Hypothèses

Le processus $(X_\ell, Z_\ell)_{0\leq\ell\leq M}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q$ est $(\mathbb{G},\mathbb{P})$-markovien.

On considère la modélisation suivante :

$$X_M - X_{\ell_0} = G(X_{\ell_0}, Z_{\ell_0}, U_{\ell_0+1}), \text{ and } L = F(X_{\ell_0}, Z_{\ell_0}, U_{\ell_0+1}), \ U_{\ell_0+1} \perp \mathcal{G}_{\ell_0}.$$

Propriété de Markov + Quantification vectorielle

$$V(\xi,\theta,x,z) = \mathbb{E}\left[v(\xi,\theta,U) := \xi + \tfrac{1}{1-\alpha}\Big(F(x,z,U) - \theta.G(x,z,U) - \xi\Big)_+\right].$$

$$\inf_{\theta_{\ell_0}\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell_0},\mathbb{P})} \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_{\ell_0}\text{-CVaR}_\alpha\left(L - \theta_{\ell_0}.(X_M - X_{\ell_0})\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\underbrace{\operatorname*{ess\,inf}_{\theta_{\ell_0}\in L^0(\mathcal{G}_{\ell_0},\mathbb{P}),\xi\in L^0(\mathcal{G}_{\ell_0})} \mathbb{E}\left[\xi + \frac{1}{1-\alpha}\left(L - \theta_{\ell_0}.(X_M - X_{\ell_0}) - \xi\right)_+ \mid \mathcal{G}_{\ell_0}\right]}_{=\left(\min_{(\xi,\theta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} V(\xi,\theta,x,z)\right)_{|x=X_{\ell_0},z=Z_{\ell_0}}}\right],$$

$$\approx \sum_{j=1}^{N_{\ell_0}} \min_{(\xi,\theta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} V(\xi,\theta,x^j_{\ell_0},z^j_{\ell_0})\mathbb{P}\left((X_{\ell_0},Z_{\ell_0})\in C_j(x_{\ell_0},z_{\ell_0})\right)$$

Quantification vectorielle optimale

Le problème global est devenu local ! Pour chaque noeud de la grille de quantification, on résout un problème d'optimisation convexe.

On résout le problème local par algorithme stochastique

V est convexe, différentiable,

$$\nabla_{(\xi,\theta)} V(\xi,\theta) = \mathbb{E}\left[\left(H_1(\xi,\theta,U), H_{2:d+1}(\xi,\theta,U)\right)\right].$$

Afin d'estimer les zéros de $\nabla_{(\xi,\theta)} V$, procédure R-M :

$$\xi_n = \xi_{n-1} - \gamma_n H_1(\xi_{n-1}, \theta_{n-1}, U_n),$$
$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n H_{2:d+1}(\xi_{n-1}, \theta_{n-1}, U_n),$$

▷ On estime la CVaR locale par une procédure compagnon

$$C_n = C_{n-1} - \gamma_n H_{d+2}(\xi_{n-1}, \theta_{n-1}, C_{n-1}, U_n)$$

$$H_1(\xi,\theta,u) = 1 - \frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{\{L-\theta X \geq \xi\}}, H_{2:d+1}(\xi,\theta,u) = -\frac{X}{1-\alpha}\mathbf{1}_{\{L-\theta X \geq \xi\}}$$

et $H_{d+2}(\xi,\theta,C,u) = C - v(\xi,\theta)$.

Convergence p.s.

$$(\xi_n, \theta_n, C_n) \xrightarrow{p.s.} \left(\xi^*_\alpha(x^j_{\ell_0}, z^j_{\ell_0}), \theta^*_\alpha(x^j_{\ell_0}, z^j_{\ell_0}), \inf_{(\xi,\theta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} V(\xi,\theta,x^j_{\ell_0}, z^j_{\ell_0})\right).$$

Estimation de stratégie dynamique

Crude hedging (C.H.)

$$\inf_{\theta \in \mathcal{A}} \text{CVaR}_\alpha \left(L - \sum_{\ell=1}^{M} \theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell \right),$$

Modélisation :

$$X_\ell - X_{\ell-1} = G_\ell(X_{\ell-1}, Z_{\ell-1}, U_\ell), \ \text{ and } \ Z_\ell = T_\ell(Z_{\ell-1}, U_\ell), \ U_\ell \perp \mathcal{G}_{\ell-1},$$

▷ Quantification vectorielle à chaque date $(X_\ell, Z_\ell)_{1 \le \ell \le M}$.

▷ Pour chaque date et chaque point de la grille de quantification, la stratégie : θ^j_ℓ, $\ell = 0, ..., M-1$, $j = 1, ..., N_\ell$.

▷ VaR_α et CVaR_α ne dépendent pas du noeud considéré puisque le risque est statique.

Problème de la dimension

Quand la dimension de l'algorithme est faible (≤ 100), il est très efficace : peu de dates et d'actifs et peu de points de quantification.

Autres méthodes : 1/3

Backward hedging (B.H.)

A la date $M-1$. On résout

$$\inf_{\theta\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_{M-1}\text{-CVaR}_\alpha\left(L-\sum_{\ell=1}^{M}\theta_{\ell-1}.\Delta X_\ell\right)\right]$$
$$= \inf_{\theta_{M-1}\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{M-1})} \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_{M-1}\text{-CVaR}_\alpha\left(L-\theta_{M-1}.\Delta X_M\right)\right],$$

solution θ^b_{M-1}, on recule d'un pas

$$\inf_{\theta_{M-2}\in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{M-2})} \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_{M-2}\text{-CVaR}_\alpha\left(L-\theta^b_{M-1}.\Delta X_M-\theta_{M-2}\Delta X_{M-1}\right)\right],$$

solution θ^b_{M-2}, etc...

propagation d'erreur

On contrôle le risque dynamiquement mais il y a une propagation de l'erreur.

Autres méthodes : 2/3

Martingale Decomposition method (M.D.H.)

On écrit L comme une somme d'accroissements de martingale

$$L = \mathbb{E}[L] + \sum_{\ell=1}^{M} \tilde{\Delta} L_\ell, \quad \tilde{\Delta} L_\ell = \mathbb{E}[L | \mathcal{G}_\ell] - \mathbb{E}[L | \mathcal{G}_{\ell-1}]$$

$$\inf_{\theta \in \mathcal{A}} \mathrm{CVaR}_\alpha \left(L - \sum_{\ell=1}^{M} \theta_{\ell-1} \Delta X_\ell \right) \leq \mathbb{E}[L] + \sum_{\ell=1}^{M} \inf_{\theta_{\ell-1} \in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell-1})} \mathrm{CVaR}_\alpha \left(\tilde{\Delta} L_\ell - \theta_{\ell-1} \Delta X_\ell \right).$$

et on résout chaque problème en utilisant la minoration suivante :

$$\inf_{\theta_{\ell-1} \in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell-1})} \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_{\ell-1}\text{-}\mathrm{CVaR}_\alpha \left(\tilde{\Delta} L_\ell - \theta_{\ell-1} \Delta X_\ell \right) \right] \leq \inf_{\theta_{\ell-1} \in L^0_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{G}_{\ell-1})} \mathrm{CVaR}_\alpha \left(\tilde{\Delta} L_\ell - \theta_{\ell-1} \Delta X_\ell \right).$$

Autres méthodes : 3/3

Classical decomposition hedging (C.D.H.)

On écrit L comme une somme d'incréments classiques

$$L = L_0 + \sum_{\ell=1}^{M} \Delta L_\ell, \quad \Delta L_\ell = L_\ell - L_{\ell-1}$$

$$\inf_{\theta \in \mathcal{A}} \mathrm{CVaR}_\alpha \left(L - \sum_{\ell=1}^{M} \theta_{\ell-1} \Delta X_\ell \right) \leq \mathbb{E}[L] + \sum_{\ell=1}^{M} \inf_{\theta_{\ell-1} \in \boldsymbol{L}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}}(\mathcal{G}_{\ell-1})} \mathrm{CVaR}_\alpha \left(\Delta L_\ell - \theta_{\ell-1} \Delta X_\ell \right).$$

et on résout chaque problème local :

$$\inf_{\theta_{\ell-1} \in \boldsymbol{L}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}}(\mathcal{G}_{\ell-1})} \mathbb{E}\left[\mathcal{G}_{\ell-1}\text{-}\mathrm{CVaR}_\alpha \left(\Delta L_\ell - \theta_{\ell-1} \Delta X_\ell \right)\right] \leq \inf_{\theta_{\ell-1} \in \boldsymbol{L}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}}(\mathcal{G}_{\ell-1})} \mathrm{CVaR}_\alpha \left(\Delta L_\ell - \theta_{\ell-1} \Delta X_\ell \right).$$

Importance Sampling et Variable de contrôle linéaire

▷ $\alpha \sim 1$, convergence lente et chaotique : problèmes des évènements rares.

▷ 2 techniques de réduction de variance combinées adaptativement avec $(\xi_n, \theta_n, C_n)_{n\geq 1}$:

1. importance sampling récursif : on translate la distribution des pertes dans la zone intéressante, *i.e.* la queue de distribution.
2. Variable de contrôle linéaire : X est une martingale alors $\mathbb{E}[\Delta X_\ell] = 0$. ΔX_ℓ peut être utilisée comme variable de contrôle.

Outlines

Exemples numériques

Couverture à un pas du risque statique d'une option spark spread

$$L = \left(S_M^e - h_R S_M^g - C\right)_+,$$

où $M = 1$ (an), $h_R = 4$BTU/kWh, C=3\$/MWh, $\sigma_g = 0.4$, $\sigma_e = 0.8$, S^e, S^g are two G.B.M. with $S_0^e = 40\$/MWh$, $S_0^g = 3\$/MMBTU$.

$\triangleright$ une simulation M.C. donne $\mathbb{E}[L] = 11.86$ avec une variance de 3692 en utilisant 3 000 000 simulations.(VR$_{\text{CVaR}}$ (LCV)$\approx$ 2)

	Sans couverture		Avec couverture un pas			
α	VaR	CVaR	VaR	θ_α^*	CVaR	VR$_{\text{CVaR}}$ (IS)
95%	65.1	114.4	63.1	7.8	98.3	16.7
99%	142.2	208.3	120.2	13.6	163.2	19.0
99.5%	183.1	257.8	146.8	16.4	190.2	20.2

Histogram of the loss with and without hedging

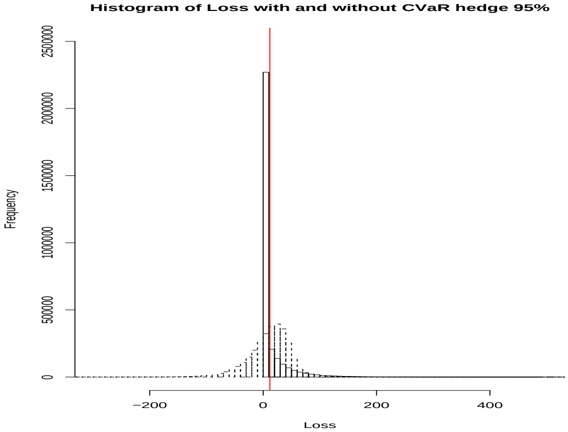

Figure: Histogramme de la perte avec (ligne pointillée) et sans (ligne normale) couverture au niveau $\alpha = 95\%$.

Comparaison entre $\alpha = 95\%$ et $\alpha = 99\%$.

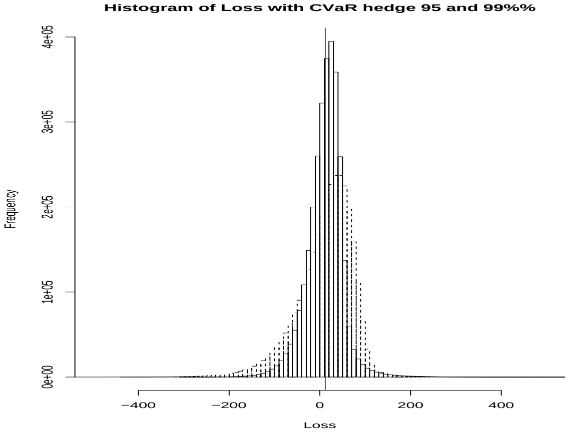

Figure: Histograme de la perte avec $\alpha = 95\%$ (ligne normale) et $\alpha = 99\%$ (ligne pointillée).

Couverture de la consommation

▷ Fournisseur de gaz :

- achète sur le marché spot une quantité C_M de gaz au prix S^g_M
- la vend au prix $K = 11$€/MWh à ses clients.

▷ $C_M = a - b \times T_M$ est la consommation à la date $M = 1$ an avec $a = 100$ Mwh et $b = 3$ MWh/C^o.

▷ La température est modélisée en utilisant un processus d'O-U

$$\mathrm{d}T_t = -\lambda(T_t - m)\mathrm{d}t + \sigma_T \mathrm{d}W_t,$$

Les deux M.B. sont corrélés avec $\rho = -0.8$. La perte s'écrit

$$L = (S^g_M - K)C_M.$$

Résultats

	Sans couverture		Couverture un pas		
α	VaR	CVaR	VaR	θ^*_α	CVaR
95%	784.6	1226.3	259.6	81.6	366.5
99%	1452.4	2012.3	437.1	89.9	537.3
99.5%	1769.9	2382.8	505.7	92.3	608.6

Table: Couverture un pas du risque statique de la consommation de gaz

Histogrammes des pertes

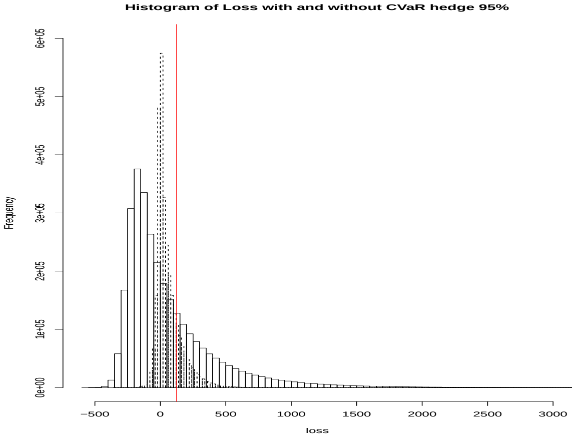

Figure: Histogrammes des pertes avec (ligne pointillée) et sans (ligne normale) couverture en CVaR avec $\alpha = 95\%$.

Couverture dynamique

3 différents nombres de dates de rebalancement : $M = 4$ (chaque trimestre), $M = 12$ (chaque mois), $M = 52$ (chaque semaine) et le seuil de confiance $\alpha = 95\%$ est fixe. 10 points de quantification.

	C.H.		B.H.		M.D.H.		C.D.H.	
M	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
4	178.3	240.9	175.9	252.5	177.8	252.9	178.9	259.2
12	163.2	214.1	160.7	233.8	158.7	221.7	161.9	232.9
52	272.6	395.1	158	233.2	148.7	210.1	153.1	223.7

Table: Couverture en CVaR de la consommation au seuil 95% avec 4 différentes méthodes.

Comparaison couverture un pas et couverture statique

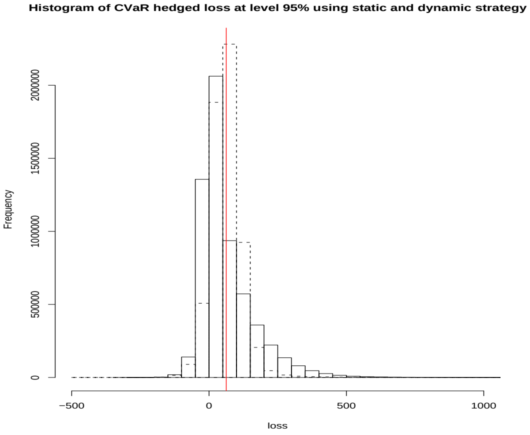

Figure: Histogrammes de la perte couverte en CVaR au seuil $\alpha = 95\%$ en utilisant une stratégie un pas (ligne normale) et une stratégie dynamique (ligne pointillée) avec la méthode M.D.H., 52 dates de rebalancement.