

Méthodes mathématiques
pour l'économie du risque et des externalités

5ème Journée de la Chaire Finance et Développement Durable
et du Laboratoire Finance des Marchés de l'Energie

René Aïd, FiME Research Center, EDF R&D,
Jean-Michel Lasry CACIB

Chaire Finance et Développement Durable
modélisations quantitatives

- La mission de la Chaire est condensée dans son sous-titre
- Ce qui est exceptionnel : en cinq ans la Chaire a produit tout l'éventail des contributions scientifiques, depuis les recherches fondamentales jusqu'aux modélisations ancrées dans les questions pratiques
- Nombreuses contributions scientifiques : PNG, JK, IE, NT, RG,..

Chaire Finance et Développement Durable

- Au point que la Chaire peut être créditée d'avoir contribué à l'émergence d'une technologie mathématique : la théorie des jeux à champs moyens
- MFG : Mean Field Games
 - 2006-09
 - 2009-

Objectifs de cette technologie mathématique

- ouvrir un nouveau champ entre la théorie des jeux et l'optimisation
- formuler des équations macroscopiques micro fondées
- modéliser la décision stratégique pour des acteurs très nombreux :
 - étendre l'équilibre de Nash
 - statique, dynamique,
 - stochastique : risques individuels ou partagés

Pourquoi MFG et Développement Durable ? MFG et Chaire FDD ?

- Disposer de techniques mathématiques spécifiquement adaptées à la modélisation des externalités qui sont souvent le cœur des problématiques DD
- des exemples nombreux et diversifiés :
 - Dynamiques prix/production des matières premières dans des contextes de court terme (chocs, fly up, ..) ou long terme (pic de Hubert, effets des incitations sur les substituts,..) : OG, JML, PLL, PNG
 - Déplacements d'équilibres par des critères hors marché,..
 - ...
- Voir exposé d'Aimé Lachapelle

MFG et Développement Durable ?

Combiner les externalités avec les hypothèses et les questionnements usuels de la théorie économique

- Continuum d'agents
- Intégrer les anticipations vs. « agents robots »
- Efficacité de l'équilibre, Effets des incitations
- Comparaison de l'équilibre mfg avec l'optimum du planificateur bienveillant
- ...

La technologie MFG

- 2006-2009 : focus sur le contexte de collectivité d'agents qui subissent des risques indépendants
- 2009 - : focus sur les effets des risques collectifs, et des flux entrant et sortant d'agents

Jeux à champ moyen : cas des risques indépendants équations forward/backward couplées

- Système MFG, exemple type (2006)
 - Les externalités sont modélisées via le terme $V(m)$
- Équation forward
 - Dynamique de la densité des agents
 - Kolmogorov, propagation forward intégrant les stratégies individuelles via le terme $\nabla_p H$
 - $\partial_t m - \Delta m + \operatorname{div}(m \nabla_p H(\cdot, \nabla v)) = 0$
- Équation backward
 - Décision stratégique optimale des agents « forward looking »
 - HJB: contrôle optimal, calcul backward de la valeur intégrant les externalités via le terme $V(m)$
 - $\partial_t v + \Delta v + H(x, \nabla v) = V(m)$

Outils (ex.) : stabilité de l'équilibre, calcul numérique
« L'élucidation »

- Processus de convergence vers l'équilibre par correction des anomalies stratégiques inspiré des travaux de Roger Guesnerie sur la stabilité « educative » des équilibres avec anticipations rationnelles
- $\partial_s = -\partial_t m + \Delta m - \text{div}(m \nabla_p H(\cdot, \nabla v)) = 0$
- $\partial_s = \partial_t v + \Delta v + H(x, \nabla v) - V(m)$
- s = temps interne du processus d'élucidation

Jeux à champ moyen: cas des de risques collectifs,
et des effets de flux entrant et sortant d'agents

Exemple de structure type systèmes mfg-monotones

- $u_i(x)$: utilité d'un agent qui est dans l'état i
- x_j : nombre d'agents dans l'état j , x : état de la collectivité
- $g_i(x)$ utilité pour un agent qui est dans l'état i qui dépend de l'état x de la collectivité : intégration des externalités
- $f_k(u)$ flux net de nouveaux agents dans l'état k : résulte d'un mécanisme (ici exogène) de construction des stratégies individuelles basées sur l'utilité des différents états
- $dx_k = f_k(u)dt + dW_k$ dynamique de la collectivité où W_k modélise un facteur de risque collectif
- système d'EDP « mfg-monotones »

$$0 = \partial_t u_i + \sum_k f_k(u) \partial_{x_k}(u_i) + g_i(x) + Lu_i$$

Illustration de la structure type

- Agents neutres au risque,
- q = nombre d'agents
- Flux financier = $g(X,q)$ avec X Brownien dans $(0,1)$
- $u = u(q,X)$ = gain espéré discounté d'un agent
- Flux entrant = $f(u)$, où f est fonction croissante de u , selon le mécanisme de décision, laissé ici exogène
- Équation de l'équilibre stationnaire mfg :
- $0 = -ru + f(u) \partial_q u + (1/2) \partial_{xx} u + g$

Perspectives

- De nombreuses avancées en cinq ans
- De nombreuses questions mathématiques ouvertes pour les cinq prochaines années
- Forte croissance des applications dans le cadre de la Chaire FDD
- Et dans d'autres domaines