Sur la modélisation de la dynamique de parcs de centrales électriques

Jean Michel Lasry, 28 juin 2013
Séminaire Fime/Chaire FDD

D'après un travail en cours
avec Pierre Noël Giraud et Pierre Louis Lions

avertissement préliminaire

- Il s'agit d'étudier des méthodes de modélisations :
- les modèles présentés seront donc, bien sur, très stylisés,
- comme d'habitude dans ce type d'étude

agenda

- Modélisation de la dynamique d’un parc de centrales identiques
- Modélisation de la dynamique d’un parc avec deux types de centrales et une demande HP/HC

Parc de centrales identiques

- La technologie permet de fabriquer des unités de production d’électricité identiques
- On note q le flux de production, i-e: le nombre d’unités produites par unité de temps
- Le cout de fabrication de ces unités est croissant en fonction de q; on supposera $C(q)=(c/2)q^2$
- Le vieillissement des unités est modélisé en supposant un taux de réduction de capacité constant a (par exemple : a = 5%).

Formulation MFG du modèle

- On notera u(t,x) l'espérance du gain actualisé à la date t pour une unité de production construite à cette date, si le parc existant existant est de taille x
- Les propriétaires d'unités de production constituent un continuum d'agents indépendants risques neutres et « price takers »
- Le flux d'unités nouvelles est donc $q^*(t) = u(t,x)/c$
- L'enjeu est de calculer u, et pour cela d'écrire l'équation récursive vérifiée par u

La demande d'électricité

- On suppose que la demande est donnée (exogène) par une fonction y=D(p) où p est le prix de l'électricité : par exemple $D(p)= 1/p^{\alpha}$
- NB : on suppose que les unités sont normalisées : l'unité de bien est la quantité produite par une unité de production pendant une période unitaire
- Si x est la taille du parc installé, la production est x, et le prix est $p=D^{-1}(x)$
- Une unité de production rapporte donc $D^{-1}(x)$-e par unité de temps, où e est le coût unitaire de production supposé identique pour toutes les unités et constant dans le temps

L'équation de u

- Rappel : $u(t,x)$ est le gain actualisé espéré pour une unité de production construite à la date t si le parc existant existant à cette date est de taille x
- Compte tenu des hypothèses (de vieillissement notamment),et en notant r le taux d'actualisation, l'équation récursive vérifiée par u est :
- $u(t,x) = (1\text{-}rdt\text{-}adt)\ u(t+dt,x+dx) + D^{-1}(x) - e$
- Où la dynamique de x résulte des créations et du vieillissement : $dx = (q^*\text{-}a)dt$, avec $q^* = c^{-1}u$
- D'où:

$$0 = u_t - (r+a)\ u + (c^{-1}u - a)\ u_x + D^{-1}(x) - e$$

Équation MFG et équation HJB

- Dans ce problème x représente l'état de la population , en l'occurrence la taille du parc installé, et l'utilité $u(t,x)$ d'un agent ne dépend que de l'état x de la population et du temps
- En fait si y est la capacité possédée par un agent, sa fonction d'utilité est $y\ u(t,x)$; comme cette utilité est homogène, le problème se simplifie, il suffit de calculer u

Équation MFG et équation HJB

- Repartons de l'équation
  $0 = u_t - (r+a)\, u + (c^{-1}u - a)\, u_x + D^{-1}(x)$
- Et considérons une primitive v de u ($v_x = u$) et G(x) de $D^{-1}(x)$-e ; on a :
- $0 = v_t - (r+a)\, v + (½)c^{-1}(v_x)^2 - a\, v_x + G(x)$

- Autrement dit la fonction v vérifie une équation HJB et peut s'interpréter comme la fonction valeur d'un problème de contrôle, plus précisément :

$$v(t_0, x_0) = Max \int_{t_0}^{\infty} e^{-(r+a)(t-t_0)}\{G(x) - (½)cq^2\}dt\,,$$
$$avec \quad \frac{dx}{dt} = q - a \qquad et\ x(t_0) = x_0$$

- On peut comparer ce problème de contrôle à celui, voisin mais différent, d'un monopole qui posséderait tout le parc d'unités de production

Équation MFG et équation HJB

- l'équation HFB est plus familière et le problème de contrôle permet de mieux comprendre :
  - les propriétés de v donc de u,
  - les propriétés des trajectoires optimales (i.e.: le réseau des caractéristiques)
  - Les conditions d'optimalité
  - …

L'impact des risques

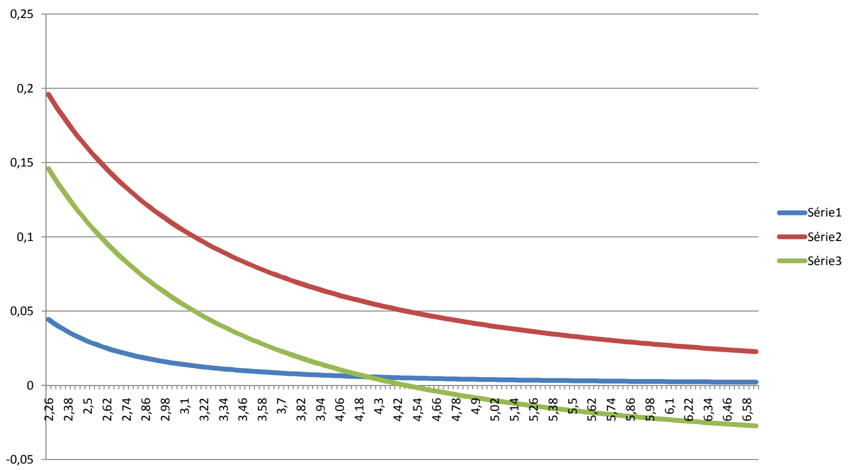
- On peut facilement introduire des risques (des aleas) dans le modèle déterministe précédent, par exemple, le risque d'apparition d'un compétiteur inattendu
- Pour donner un exemple simple, supposons qu'une capacité de production k peut s'introduire dans le parc, et que cet évènement peut se produire selon une loi de Poisson d'intensité b. Pour prendre en compte cet alea il suffit de compléter l'équation MFG de u :

$$0 = u_t - (r+a)\, u + (c^{-1}u - a)\, u_x + D^{-1}(x) - e + b(\, u(x+k) - u(x)\,)$$

- En l'occurrence la valeur u et l'investissement q* sont décroissants avec b. L'équilibre stationnaire asymptotique du cas déterministe est remplacé par une mesure stationnaire invariante

Abscisse x

Ordonnée : bleu $D^{-1}(x)$; rouge u(x) ; vert (q*-a)



Modélisation de la dynamique d'un parc avec deux types de centrales et une demande HP/HC

Parc avec deux types de centrales

- La technologie permet de fabriquer des unités de production d'électricité de deux types
- On note q_i , pour i=1,2, le flux de production, i-e: le nombre d'unités de type i produites par unité de temps
- Le cout de fabrication de ces unités est croissant en fonction de q; on supposera $C_i(q_i)=(c_i/2)q_i^2$
- Le vieillissement des unités est modélisé en supposant un taux de réduction de capacité constant a_i (par exemple : a_i = 5%).

Formulation MFG du modèle

- On notera u_i (t, x_1,x_2) , pour i=1 et i=2, l'espérance du gain actualisé à la date t pour une unité de production de type i construite à cette date, si le parc existant existant est de taille (x_1,x_2), où x_i est le nombre d'unités de type i.
- Les propriétaires d'unités de production constituent un continuum d'agents indépendants risques neutres et « price takers »
- Le flux d'unités nouvelles est donc $q_i^*(t) = u_i(t,x)/c_i$
- L'enjeu est de calculer u_1 et u_2, et pour cela d'écrire le système d'équations MFG vérifié par u = (u_1 , u_2)

La demande d'électricité

- On suppose que la demande est une donnée exogène
- On suppose que cette demande fluctue très rapidement par rapport au temps caractéristique de la dynamique du parc installé
- Typiquement, la demande fluctue à l'échelle de la journée, alors que la construction des unités nouvelles prend des mois, ou des trimestres.
- Pour fixer les idées, supposons que la demande est très différente chaque jour selon les heures
  - Durant les heures creuses, la demande est une fonction $y=D_{HC}(p)=1/p^{\alpha}$, où p est le prix de l'électricité
  - Durant les heures pleines, la demande est une fonction $y=D_{HP}(p)=5/p^{\alpha}$
  - Et par ailleurs, les heures creuses constituent les ¾ de la journée, les heures pleines 1/4 de la journée

La demande d'électricité

- Une unité de production rapporte donc
  - $D_y^{-1}(z)-e_i$ par unité de temps, avec des valeurs de y et de z différentes selon les moments,
  - e_i est le cout de production unitaire de fonctionnement des unités de type i;
  - le cas intéressant est celui où les centrales peu couteuses à fabriquer ont un coût de fonctionnement élevé : $c_1 > c_2$ et $e_1 < e_2$
  - z est la production selon les moments de la journée : typiquement les centrales de type 2 ne produiront que pendant les heures pleines, et on aura $z = x_1$ pendant les heures creuses et $z = x_1 + x_2$ pendant les heures pleines; ceci se produit si : $e_2 > D_{HC}^{-1}(x_1)$
  - Donc une unité de type 2 rapportera $f_2(x_1, x_2) = (1/4)\ (D^{-1}_{HP}(x_1 + x_2) - e_2)$
  - Et une unité de type 1 rapportera
    $f_1(x_1, x_2) = (1/4)\ (D^{-1}_{HP}(x_1 + x_2) - e_1) + (3/4)\ (D^{-1}_{HP}(x_1 + x_2) - e_1)$

  Avec ces hypothèses, les unités de type 2 rapportent moins, mais leur coût de construction est moins élevé : les deux types d'unités peuvent cohabiter.

Le système d'équations MFG vérifiées par $u = (u_1,u_2)$

$$u_i(t,x_1,x_2) = (1-r-a)\, u_i(t+dt, x_1+dx_1, x_2+dx_2) + f_i(x_1,x_2)\, dt$$

où la dynamique de x résulte des créations et du vieillissement :

$$dx_i = (q_i^* - a)\, dt \qquad et \qquad q_i^* = c_i^{-1} u_i$$

- D'où:

$$0 = \partial_t u_1 - (r+a)u_1 + (q_1^* - a)\, \partial_1 u_1 + (q_2^* - a)\, \partial_2 u_1 + f_1(x_1,x_2)$$

$$0 = \partial_t u_2 - (r+a)u_2 + (q_1^* - a)\, \partial_1 u_2 + (q_2^* - a)\, \partial_2 u_2 + f_2(x_1,x_2)$$

$$q_1^* = c_1^{-1} u_1 \qquad q_2^* = c_2^{-1} u_2$$

Le système d'équations MFG-monotones vérifiées par u = (u_1,u_2)

- D'où, pour i=1 et 2 :

$$0 = \partial_t u_i - (r+a)u_i + g_1(u_1,u_2)\partial_1 u_i + g_1(u_1,u_2)\partial_2 u_i + f_i(x_1,x_2)$$

- avec g et f monotones de R^2 dans R^2, et en outre :

$$\frac{\partial g_1(u_1,u_2)}{\partial u_2} = \frac{\partial g_2(u_1,u_2)}{\partial u_1} \quad et \quad \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}$$

- Donc : g = grad G, et f = grad F

Le système d'équations MFG-monotones vérifiées par u = (u_1,u_2)

La solution u est donc le gradient d'une fonction v qui vérifie l'équation HJB

$$0 = \partial_t v - (r+a)v + G(\nabla v) + F$$

Cette équation peut s'interpréter comme un problème de contrôle, avec les mêmes conséquences que dans le cas précédent :

- concepts familier de HJB notamment trajectoires,.
- comparaison avec le problème du monopole