Economie des Marchés d'énergie
Modélisation et calcul

Delphine Lautier et Nizar Touzi

Journée de la Chaire Finance et Développement Durable

Produits Dérivés sur les Marchés d'Energie
Modélisation, Contrôle des Risque et Calcul

6 Décembre 2011

Equipe

Frédéric Bonnans
Bruno Bouchard
Luciano Campi
René Carmona
Romuald Elie
Noufel Frikha
Emmanuel Gobet
Peter Tankov
Denis Talay

René Aïd
Xavier Warin
Nadia Oudjane
Marie Bernhart
Olivier Féron

Mathilde Bouriga
Arash Fahim
Nicolas Langrené
Adrien Nguyen Huu
Dylan Possamaï
Xiaolu Tan
Gilles-Edouard Espinosa

Nouveaux arrivés

Alexandre d'Aspremont

Pierre Del Moral

Axes de recherche

• Modélisation des marchés d'énergie
- Contrats spécifiques
- Fonctionnement spécifique (stockage, irréversibilité)

• Marché des émissions
- Modélisation du marché, risques et évaluation
- Stratégie d'entreprise soumise aux quotas d'émissions

• Contrôle des risques, robustesse

• Cacul numérique : EDP non linéaires issues du contrôle stochastique, simulation d'événements rares

Axe 2 : Marchés des permis d'émission de carbone

Hypothèse Marché liquide des permis d'émission

Absence d'arbitrage $\Longrightarrow$ les prix $\{Y_t, t \geq 0\}$ des contrats d'émission forment une martingale

$$dY_t \;=\; Z_t\, dB_t \quad \text{et} \quad Y_T = \lambda \mathbb{1}_{[\Lambda,\infty)}(E_T)$$

E_t^i : emissions cumulées de l'entreprise i jusqu'en t

$$E_t \;=\; \sum_{i\in\mathcal{I}} E_t^i$$

Reste à modéliser l'évolution de E_t...

Premier modèle : production exogène

- Réduction des émissions à un coût...

$$dE_t^i = (b_t^i - \xi_t^i)dt + \sigma_t^i dW_t, \qquad E_0^i = 0.$$

- Objectif de l'entreprise :

$$V(x^i) := \sup_{(\xi^i,\theta^i)\in\mathcal{A}^i} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\{U^i(X_T^{i,\xi^i\theta^i})\}$$

où X^i est la valeur du portefeuille de l'entreprise i :

$$X_T^i = X_T^{i,\xi^i,\theta} = x^i + \int_0^T \theta_t^i dY_t - \int_0^T c^i(\xi_t^i)dt - E_T^{\xi^i} Y_T$$

Prix des permis d'émission à l'équilibre

Dans ce modèle simple, efforts de réduction optimal :

$$dE_t^i = \left[\tilde{b}_t^i - [(c^i)']^{-1}(Y_t)\right] dt + \sigma_t^i dB_t, \qquad E_0^i = 0, \text{ for each } i$$

Sous des hypothèse simplificatrices $\Longrightarrow$ **FBSDE**

$$dE_t = \{b(t, E_t) - f_t(Y_t)\}dt + \sigma(t, E_t)dB_t, \qquad E_0 = 0$$
$$dy_t = Z_t dB_t, \qquad Y_T = \lambda \mathbb{1}_{[\Lambda,+\infty)}(E_T),$$

avec f croissante $\Longrightarrow$

Existence et Unicité

prix d'options, déviation du modèle BS ($f \equiv 0$)

En général, modèles de champs moyen...

Prix des permis d'émission à l'équilibre

Dans ce modèle simple, efforts de réduction optimal :

$$dE_t^i = \left[\tilde{b}_t^i - [(c^i)']^{-1}(Y_t)\right] dt + \sigma_t^i dB_t, \qquad E_0^i = 0, \text{ for each } i$$

Sous des hypothèse simplificatrices $\Longrightarrow$ **FBSDE**

$$dE_t = \{b(t, E_t) - f_t(Y_t)\}dt + \sigma(t, E_t)dB_t, \qquad E_0 = 0$$
$$dy_t = Z_t dB_t, \qquad Y_T = \lambda \mathbb{1}_{[\Lambda, +\infty)}(E_T),$$

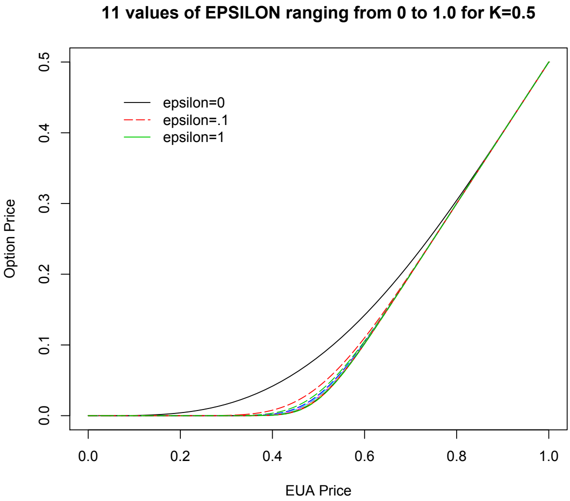
avec f croissante $\Longrightarrow$

Existence et Unicité

prix d'options, déviation du modèle BS ($f \equiv 0$)

En général, modèles de champs moyen...

Option sur permis d'émissions



Un modèle de production

- Prix du bien produit :

$$dP_t = \sigma(t, P_t)dW_t$$

- Emissions cumulées pour une production au taux q^i :

$$E_t^i := e^i \int_0^t q_t^i dt$$

- Valeur du portefeuille de l'entreprise i

$$X_T^i = X_T^{i,q^i,\theta^i} = x^i + \int_0^T \theta_t^i dY_t + \int_0^T [P_t q_t^i - c_t^i(q_t^i)]dt - E_T^i Y_T dt$$

Alors, production optimale :

$$\hat{q}_t^i = [(c^i)']^{-1}(P_t - e^i Y_t)$$

Prix des permis d'émission à l'équilibre – Modèle de production

Emissions totales $E_t := \sum_{i\in\mathcal{I}} E_t^i$ à la date t

Prix d'équilibre des permis d'émission caractérisé par FBSDE :

$$
\begin{aligned}
dP_t &= \sigma(t,P_t)dB_t, \quad P_0 = p \\
dE_t &= f(P_t,Y_t)dt, \quad E_0 = 0, \qquad f(p,y) := \sum_{i\in\mathcal{I}} e^i[(c^i)']^{-1}(p - e^i y) \\
dY_t &= Z_t dB_t, \quad Y_T = \lambda \mathbf{1}_{[\Lambda,+\infty)}(E_T)
\end{aligned}
$$

Résultat : Il existe une unique solution vérifiant

$$\mathbf{1}_{(\Lambda,\infty)}(E_T) \le Y_T \le \mathbf{1}_{[\Lambda,\infty)}(E_T).$$

Condition terminale $Y_T = \mathbf{1}_{[\Lambda,\infty)}(E_T)$ pas satisfaite, en général !

Axe 3 : Contrôle des Risques, Robustesse

- Couverture avec contrôle de la probabilité de succès

Stratégie de couverture pour un risque G telle que

$$\mathbb{P}\big[X_T \geq G\big] \;\geq\; p$$

- Gestion de portefeuille avec contrôle de probabilité des pertes

$$\sup\left\{\mathbb{E}U(X_T) : \mathbb{P}[X_T \geq K] \geq p\right\}$$

- Contrôle robuste des risques : supposons les prix de calls européens donnés pour tout prix d'exercice, pour les maturités T_i, $i = 1, \ldots, n$

$$\sup\left\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[G(S_.)\right] : S\ \mathbb{P}-\text{martingale et } S_{T_i} \sim_{\mathbb{P}} \mu_i,\ \ i \leq n\right\}$$

(transport optimal)

Axe 3 : Contrôle des Risques, Robustesse

- Couverture avec contrôle de la probabilité de succès

Stratégie de couverture pour un risque G telle que

$$\mathbb{P}\left[X_T \geq G\right] \;\geq\; p$$

- Gestion de portefeuille avec contrôle de probabilité des pertes

$$\sup\left\{\mathbb{E}U(X_T) : \mathbb{P}[X_T \geq K] \geq p\right\}$$

- Contrôle robuste des risques : supposons les prix de calls européens donnés pour tout prix d'exercice, pour les maturités T_i, $i = 1, \ldots, n$

$$\sup\left\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[G(S_\cdot)\right] : S\ \mathbb{P}-\text{martingale et } S_{T_i} \sim_{\mathbb{P}} \mu_i,\ i \leq n\right\}$$

(transport optimal)

Axe 3 : Contrôle des Risques, Robustesse

• Couverture avec contrôle de la probabilité de succès

Stratégie de couverture pour un risque G telle que

$$\mathbb{P}\left[X_T \geq G\right] \; \geq \; p$$

• Gestion de portefeuille avec contrôle de probabilité des pertes

$$\sup\left\{\mathbb{E}U(X_T) : \mathbb{P}[X_T \geq K] \geq p\right\}$$

• Contrôle robuste des risques : supposons les prix de calls européens donnés pour tout prix d'exercice, pour les maturités T_i, $i = 1, \ldots, n$

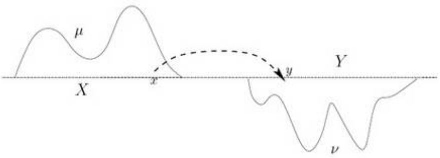
$$\sup\left\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[G(S_{\cdot})\right] : S \; \mathbb{P} - \text{martingale et } S_{T_i} \sim_{\mathbb{P}} \mu_i, \;\; i \leq n\right\}$$

(transport optimal)

"Problème des déblais et des remblais"

Gaspard Monge (1746-1818) formul en 1781 le problème de :

Transport de masse au plus bas coût,
étant données des distributions initiale et finale



- Distributions initiale et finale : μ_0, μ_1

Formulation analytique :

$$\min_{T \in \mathcal{T}(\mu_0,\mu_1)} \int c(x, T(x))\mu_0(dx)$$

où $\mathcal{T}(\mu_0, \mu_1) = \{T : x \longmapsto T(x) : \mu_1 = \mu_0 \circ T^{-1}\}$

- **Formulation probabiliste** (Kantorovich, 1942) :

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)} \int c(x,y)\pi(dx,dy) \quad = \quad \inf_{\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)} \mathbb{E}_\pi \left[c(X,Y)\right]$$

où $\Pi(\mu_0, \mu_1) = \{\pi \ \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) : \pi_X = \pi_0, \pi_Y = \pi_1\}$

Exemple : $c(x,y) = |x-y|^2 \Longrightarrow sup_{\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)} \mathbb{E}^\pi[XY]$

Supposons donnés les prix des call Européens
$c_T(k) = \mathbb{E}[(S_T - k)^+$ pour tous les strikes $k \geq 0$, alors $\Longrightarrow$

$$S_T \sim \mu_T \quad \text{avec} \quad \mu_T\big([k,\infty)\big) = \partial_- c_T(k)$$

Evaluation robuste

$$\inf_{\sigma\in\Sigma_T(\mu)} \mathbb{E}\big[\xi(S^\sigma_t, 0 \leq t \leq T)\big] \quad \text{and} \quad \sup_{\sigma\in\Sigma_T(\mu)} \mathbb{E}\big[\xi(S^\sigma_t, 0 \leq t \leq T)\big]$$

où :

$$dS^\sigma_t = S_t \sigma_t dW_t \quad \text{et} \quad \sigma \in \Sigma_T(\mu) := \big\{\sigma : \; S^\sigma_T \sim \mu_T\big\}$$

Axe 4 : Calcul

- Programmation stochastique
- Méthodes de Monte Carlo pour EDP non linéaires
- Réduction de variance pour les méthodes de simulation
- Simulation d'événement rares

Conclusions

- Plusieurs autres champs à explorer
  - Modèles de champs moyen pour le marché de carbone
  - Stratégie optimale pour les énergies nouvelles
  - Méthodes numériques pour les problèmes de contrôle des risques avec robustesse
  - Parallélisation dans les méthodes de Monte Carlo

- Interactions très positive avec les chercheurs EDF, rôle très important du laboratoire FIME, articles publiés dans des revues internationales

- Formation de doctorants et sensibilisation aux sujets liés au marché de l'énergie