

Résolution d'EDP totalement non linéaires

Xavier Warin

6 mai 2009

joint work with Arash Fahim, Nizar Touzi

beamer-logic

Part I

Des EDP linéaires aux EDP totalement non linéaires

La formule

Soit $\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$
lipschitz en x uniformément en t et à croissance linéaire.

$$dX_t = \mu(t, x)dt + \sigma(t, x)dW_t$$

Soit l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L}^X \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \cdot D\varphi + \frac{1}{2} \sigma \sigma^T \cdot D^2 \varphi.$$

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}^X v + kv - f = 0 \\ v(T, x) = g(x); \end{cases}$$

Si solution régulière v à croissance polynomiale

$$v(t, x) = \mathbb{E}_t \left[\int_t^T e^{-\int_t^s k(r, X_r) dr} f(s, X_s) ds + g(X_T) e^{-\int_t^T k(r, X_r) dr} \right]$$

Valorisation

Schéma d'Euler pas $h = \frac{T-t}{N}$, $t_i = ih$:

$$\begin{aligned} X_h^0 &= x \\ X_h^i &= \mu(t, X_h^{i-1})h + \sigma(t, X_h^{i-1})\Delta W_{i-1}, \end{aligned}$$

avec $\Delta W_{i-1} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$.

Approximation des intégrales plus échantillonnage (Monte Carlo)

$$Y_h^j = \sum_{i=0}^{N-1} e^{-\sum_{k=0}^i hk(r, X_h^{k,j})} hf(ih, X_h^{i,j}) + g(X_h^{N-1,j}) e^{-\sum_{k=0}^{N-1} hk(r, X_h^{k,j})}$$

$$v(t, x) \simeq \frac{1}{M} \sum_j Y_h^j$$

Backward Stochastic Differential Equation (Peng, Pardoux, Quenez, El Karoui)

Supposons pour $f(t, x, y, z)$ lipschitz en (x, y, z) et uniformément en t .

$$\begin{cases} -\mathcal{L}^X v(t, x) - f(t, x, v(t, x), \sigma^T DV(t, x)) = 0 \\ v(T, x) = g(x); \end{cases}$$

a une solution classique à croissante polynomiale. Alors $v(t, x) = Y_t^{t,x}$ qui est l'unique solution \mathbb{F}^W adaptée de

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, x)dt + \sigma(t, x)dW_t \\ dY_s^{t,x} = -f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})ds + Z_s^{t,x}dW_s \\ Y_T^{t,x} = g(X_T^{t,x}) \end{cases}$$

- $f = 0$, $Y_t^{t,x} = \mathbb{E}_t [g(X_T^{t,x})]$
- Extension quadratique Imkeller, Reis 2009.

Schéma classique de résolution de BSDE

Bally-Pages 2003, Zhang 2004, Bouchard Touzi 2004, Gobet Labart 2006

- 1 Simulation de $X_h^{i,j}$ par schéma d'Euler ($j = 1, MC, i = 1, N$)
- 2 Utilisation du schéma backward

$$\begin{aligned}
 Y_h^{N,j} &= g(X_h^{N,j}) \\
 Y_h^i &= \mathbb{E}_{t_i} \left[Y_h^{i+1} \right] + f(t, X_h^i, Y_h^i, Z_h^i)h, \quad 0 \leq i \leq N-1 \\
 Z_h^i &= \mathbb{E}_{t_i} \left[Y_h^{i+1} \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{h} \right]
 \end{aligned}$$

Remark

Non unicité du schéma forward

$$\begin{aligned}
 d\tilde{X}_t &= dX_t + \tilde{\mu}_t dt \\
 \tilde{f}(t, x, y, z) &= f(t, x, y, z) - \tilde{\mu}_t z
 \end{aligned}$$

$\tilde{Y}_t^{t,x}$ solution de la même EDP

Autres schémas possibles

Autres versions explicite qui évite les itérations de Picard sur Y_h^i :

-

$$Y_h^i = \mathbb{E}_{t_i} [Y_h^{i+1} + f(t, X_h^i, Y_h^{i+1}, Z_h^i)h], 0 \leq i \leq N - 1$$

-

$$Y_h^i = \mathbb{E}_{t_i} [Y_h^{i+1}] + f(t, X_h^i, \mathbb{E}_{t_i} [Y_h^{i+1}], Z_h^i)h, 0 \leq i \leq N - 1$$

Autre Schéma à base de Monte Carlo

- Bender Denk 2007 (idée style Longstaff Schwarz)
- Gobet Labart 2009

Part II

Les EDP totalement non linéaires

But et état des lieux

Résoudre

$$-\mathcal{L}^X v - f(\cdot, v, Dv, D^2v) = 0, \quad \text{on } [0, T) \times \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

$$v(T, \cdot) = g, \quad \text{on } \mathbb{R}^d. \quad (3.2)$$

Premier papier de Cheridito, Soner, Touzi Victor (2007)
Proposition d'un schéma particulier (utilisation d'Ito sur u et Du):

$$\begin{aligned} Y_h^{N,j} &= g(X_h^{N,j}) \\ Y_h^i &= \mathbb{E}_{t_i} \left[Y_h^{i+1} \right] + f(t, X_h^i, Y_h^i, Z_h^i, \Gamma_h^i) h, \quad 0 \leq i \leq N-1 \\ Z_h^i &= \mathbb{E}_{t_i} \left[(\sigma^T)^{-1} Y_h^{i+1} \frac{\Delta W_i}{h} \right] \\ \Gamma_h^i &= \mathbb{E}_{t_i} \left[Z_h^{i+1} \frac{\Delta W_i^T}{h} (\sigma)^{-1} \right] \end{aligned}$$

Une nouvelle approche

Par formule d'Ito sur un pas tel que $X_{t_i} = x$:

$$\mathbb{E}_{t_i, x} [v(t_{i+1}, X_{t_{i+1}})] = v(t_i, x) + \mathbb{E}_{t_i, x} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{L}^X v(t, X_t) dt \right]$$

Soit

$$\mathbb{E}_{t_i, x} [v(t_{i+1}, X_{t_{i+1}})] = v(t_i, x) - \mathbb{E}_{t_i, x} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\cdot, v, Dv, D^2v)(t, X_t) dt \right].$$

Suggère (approximation de Riemann pour l'intégrale) :

$$v^h(t_i, x) = \mathbb{E}_{t_i, x} [v^h(t_{i+1}, X_{t_{i+1}})] + hf(x, \mathbb{E}_{t_i, x} [v^h(t_{i+1}, X_{t_{i+1}})], \mathbb{E}_{t_i, x} [Dv^h(t_{i+1}, X_{t_{i+1}})], \mathbb{E}_{t_i, x} [D^2v^h(t_{i+1}, X_{t_{i+1}})])$$

Espérance conditionnelles et intégration par partie du noyau gaussien

Pour toute fonction de $(0, T] \times \mathbb{R}^d$ à \mathbb{R} avec croissance exponentielle:

$$(\mathbb{E}_{t_i, x} [Dv(t_{i+1}, X_{t_{i+1}})], E_{t_i, x} [D^2 v(t_{i+1}, X_{t_{i+1}})]) = \mathbb{E}[v(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}^{t_i, x}) H_h(t_i, x)],$$

où $H_h = (H_1^h, H_2^h)$ et

$$H_1^h = (\sigma^T)^{-1} \frac{W_h}{h}, \quad H_2^h = (\sigma^T)^{-1} \frac{W_h W_h^T - h \mathbf{I}_d}{h^2} \sigma^{-1}.$$

Mise sous forme de SOBSDE :

$$Y_h^{N,j} = g(X_h^{N,j})$$

$$Y_h^i = \mathbb{E}_{t_i} [Y_h^{i+1}] + f(t, X_h^i, \mathbb{E}_{t_i} [Y_h^{i+1}], Z_h^i, \Gamma_h^i) h, \quad 0 \leq i \leq N-1$$

$$Z_h^i = \mathbb{E}_{t_i} \left[(\sigma^T)^{-1} Y_h^{i+1} \frac{\Delta W_i}{h} \right]$$

$$\Gamma_h^i = \mathbb{E}_{t_i} \left[Y_h^{i+1} (\sigma^T)^{-1} \frac{\Delta W_i \Delta W_i^T - h \mathbf{I}_d}{h^2} \sigma^{-1} \right]$$

Quelques remarques générales

Si approximation du brownien par arbre binomial :

$$W_h \simeq \frac{1}{2} \left(\delta_{\sqrt{h}} + \delta_{-\sqrt{h}} \right)$$

alors on retrouve le schéma différence finie centré

$$\mathbb{E} \left[u(t+h, X_h^{t,x}) \frac{\Delta W}{h} \right] \approx \frac{u(t, x + \sqrt{h}) - u(t, x - \sqrt{h})}{2\sqrt{h}},$$

Sur la méthode : non unicité de la volatilité du processus forward :

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= dX_t + \tilde{\mu}_t dt + \tilde{\sigma} dw_t \\ \tilde{f}(t, x, y, z, \gamma) &= f(t, x, y, z, \gamma) - \tilde{\mu}_t z - \frac{1}{2} \text{Tr} [\tilde{\sigma} \tilde{\sigma}^T \gamma] \end{aligned}$$

$\tilde{u}(t, x) = \tilde{Y}_t^{t,x}$ est solution de la même EDP non linéaire.

Quelques remarques schéma 1 (Fahim and al)

- Symetrie de Γ
- Calcule le gradient directement à partir des valeurs de la fonction au pas de temps suivant : Si approximation du brownien par un arbre trinomial, on retrouve le schéma différences finies centrées pour la dérivée seconde :

$$W_h \simeq \frac{1}{6} \left(\delta_{\{\sqrt{3h}\}} + 4\delta_{\{0\}} + \delta_{\{-\sqrt{3h}\}} \right)$$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[D^2 u(t+h, X_h^{t,x}) \right] \simeq \frac{u(t, x + \sqrt{3h}) - 2u(t, x) + u(t, x - \sqrt{3h})}{3h},$$

Schéma 2 (Cheridito and al)

- Non symetrie de Γ
- Calcule le gradient comme dérivée de la dérivée au pas de temps suivant,
- Nécessité d'avoir une condition terminale pour Z

Résultats de convergence (Fahim, Touzi, Warin 09)

Theorem

- 1** Si $f(t, x, y, z, \gamma)$ en plus lipschitz uniformement en x et $\epsilon I \leq D_\gamma f \leq \sigma \sigma^\top$, $Y_0^n(t, x) \rightarrow v(t, x)$ uniformement sur tout compact où v est solution de viscosité de l'EDP.
- 2** si f résulte d'une optimisation de style HJB,
 $-ch^{1/10} \leq v - v^h \leq ch^{1/4}$

Preuve de (2) basée sur Barles Jakobsen 2007 utilisant la méthode de Krylov des coefficients secoués.

Quelques remarques sur la vitesse de convergence

Remark

- Si $f(\gamma) = \gamma$, on trouve un taux de convergence en $O(h^{1/2})$,
- EDP : $\Delta x = O(\sqrt{h})$, soit des termes d'erreur en $O(\Delta x^{1/5})$ et $O(\Delta x^{1/2})$
- Pour les différences finies :
 - si solution régulière, convergence en $O(\Delta x)$ pour schéma décentré, $O(\Delta x^2)$ pour schéma centré,
 - dans le cas général, convergence en $O(\sqrt{\Delta x})$ pour schéma décentré.

Calcul d'espérance conditionnelles par Malliavin

Utilisation de fonction de localisation exponentielle nécessaire
($\phi(x) = \exp(-\eta x)$) Bouchard Touzi 2004)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t_i, x}(f(X_{i+1})) &= \frac{\mathbb{E}(\delta_x(X_i)f(X_{i+1}))}{\mathbb{E}(\delta_x(X_i))} \\ &\simeq \frac{\sum_{l=1}^{MC} \mathbf{1}_{X_h^{i, (l)} > x^{(l)}} f(X_h^{i+1, (l)}) \phi(X_h^{i, (l)} - x^{(l)}) \left(\frac{W_i^{(l)}}{t_i} - \frac{\Delta W_i^{(l)}}{h} + \eta \right)}{\sum_{l=1}^{MC} \mathbf{1}_{X_h^{i, (l)} > x} \phi(X_h^{i, (l)} - x^{(l)}) \left(\frac{W_i^{(l)}}{t_i} - \frac{\Delta W_i^{(l)}}{h} + \eta \right)} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_{t_i, x}(f(X_{i+1})\Delta W_i) \simeq \frac{\sum_{l=1}^{MC} \mathbf{1}_{X_h^{i, (l)} > x^{(l)}} f(X_h^{i+1, (l)}) \phi(X_h^{i, (l)} - x^{(l)}) \left(1 - \frac{(\Delta W_i^{(l)})^2}{h} + \left(\frac{W_i^{(l)}}{t_i} + \eta \right) (\Delta W_i^{(l)}) \right)}{\sum_{l=1}^{MC} \mathbf{1}_{X_h^{i, (l)} > x} \phi(X_h^{i, (l)} - x^{(l)}) \left(\frac{W_i^{(l)}}{t_i} - \frac{\Delta W_i^{(l)}}{h} + \eta \right)}$$

$$\mathbb{E}_{t_i, x}(f(X_{i+1})\Delta W_i^2) \simeq \frac{\sum_{l=1}^{MC} \mathbf{1}_{X_h^{i, (l)} > x^{(l)}} f(X_h^{i+1, (l)}) (2\Delta W_i^{(l)} - \frac{(\Delta W_i^{(l)})^3}{h} + \left(\frac{W_i^{(l)}}{t_i} + \eta \right) (\Delta W_i^{(l)})^2)}{\sum_{l=1}^{MC} \mathbf{1}_{X_h^{i, (l)} > x} \phi(X_h^{i, (l)} - x^{(l)}) \left(\frac{W_i^{(l)}}{t_i} - \frac{\Delta W_i^{(l)}}{h} + \eta \right)}$$

Remarques sur Malliavin

- Variance théorique minimale pour $\eta = 1/\sqrt{h}$, $\eta = \sqrt{2}/\sqrt{h}$ et $\eta = \sqrt{7}/\sqrt{3h}$ respectivement.
- Tests numériques avec $\eta = 5./\sqrt{h}$.
- Eviter le calcul exact du dénominateur : utiliser le même schéma que le numérateur

Utilisation de Malliavin en grande dimension

Présence de fonction heaviside à calculer :

- Calcul bestial en $O(n^2)$
- Calcul par algorithme de tri (Bouchard Warin (2009?10?)).
 - $O(n \log n)$ en dimension 1,
 - $O(n(\log n)^{d-1})$ en dimension supérieure.

Temps de calcul d'une espérance conditionnelle par Malliavin:

Dimension	Nombre de particules	algo BW (seconde)
2D	400000	1.1
2D	1600000	5.8
2D	6400000	28.4
3D	400000	9.85
3D	1600000	51.28
3D	6400000	260
4D	400000	38.85
4D	1600000	211
4D	6400000	989

Espérance conditionnelle par regression

Lemor-Gobet-Warin (2005)

Recommandation:

- Ne pas utiliser de fonctions de base globales (méthode spectrale : oscillations pour un nombre fini de particules dues à la régression)
- Utilisation de fonctions de base locale adaptées à la densité de la distribution sous-jacente (style élément fini non conforme) : fonction de base linéaire sur chaque maille.

Autres avantages

- 1** Matrice du problème adjoint associé à la régression très creuse
- 2** Possibilité de monter en dimension avec un très grand nombre de fonctions de base.

Mean Curvature Flow 3D

Trouver la géométrie caractérisée par annulation de v solution de

$$v_t - \Delta v + \frac{Dv \cdot D^2 v Dv}{|Dv|^2} = 0 \quad \text{et} \quad v(0, x) = g(x) \quad (4.3)$$

Solution pour sphère de rayon $2R$: sphère de rayon

$$R(t) = 2\sqrt{R^2 - t}.$$

Choix $g(x) := 4R^2 - |x|^2$ positive dans la sphère, négative sinon.

Inversion en temps :

$$-v_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta v + f(x, Dv, D^2 v) = 0 \quad \text{and} \quad v(T, x) = g(x),$$

$$f(x, z, \gamma) := \gamma \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - 1 \right) + \frac{z \cdot \gamma z}{|z|^2}.$$

- Processus forward sous-jacent associé à une diffusion simple de volatilité σ ,
- Troncature de f à 200
- couplage avec algorithme de suivi de frontière (utilisation de Z le gradient).

MCF : quelques graphes

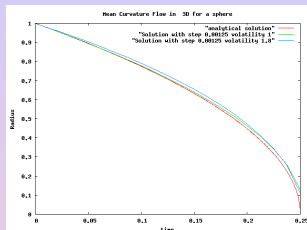


Figure: Solution du problème de la sphère

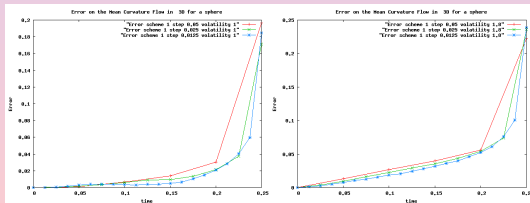


Figure: schema 1 : solution temporelle pour diverses volatilités

MCF : quelques graphes (2)

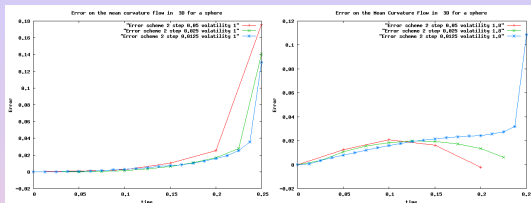


Figure: schema 2 : solution temporelle pour diverses volatilités

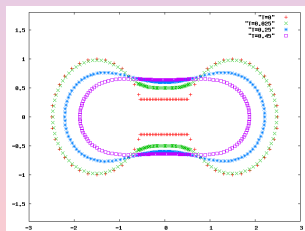


Figure: MCF en 2D

Quelques précisions sur les paramètres de calculs

- Résultats obtenus par Malliavin et Regression en 2D et 3D,
- Résultats obtenus avec 1 million de particules (calcul de référence)
- Pas de temps de 0.0125,
- $10 * 10 * 10$ mailles pour regression en 3D (soit 4000 ddl)

Regression un plus rapide et un peu plus précise.

Un problème d'optimisation de portefeuille en dimension 2

Modèle de Heston

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{Y_t} S_t dW_t^{(1)} \\dY_t &= k(m - Y_t) dt + c\sqrt{Y_t} \left(\rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)} \right),\end{aligned}$$

Optimisation par fonction d'utilité exponentielle, état du système $(S_t, Y_t) = (x, y)$. Valeur du portefeuille $v(t, x, y)$ solution de

$$\begin{aligned}v(T, x, y) &= -e^{-\eta x} \\0 &= -v_t - k(m - y)v_y - \frac{1}{2}c^2 y v_{yy} + \frac{(\mu v_x + \rho c y v_{xy})^2}{2y v_{xx}}.\end{aligned}$$

Solution quasi explicite (intégrale)

Optimisation de portefeuille en dimension 2 (suite)

Réécriture :

$$-v_t - k(m - y)v_y - \frac{1}{2}c^2 y v_{yy} - \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} + f(y, Dv, D^2v) = 0,$$

$$v(T, x, y) = -e^{-\eta x}$$

où $\sigma > 0$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_2$ est donné par :

$$f(y, z, \gamma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma_{11} + \frac{(\mu z_1 + \rho c y \gamma_{12})^2}{2y \gamma_{11}}.$$

Sous cette forme l'EDS forward est donnée par :

$$dX_t^{(1)} = \sigma dW_t^{(1)}$$

$$dX_t^{(2)} = k(m - X_t^{(2)})dt + c\sqrt{X_t^{(2)}}dW_t^{(2)}.$$

Nécessité de tronquer f

Quelques résultats numériques en 2D

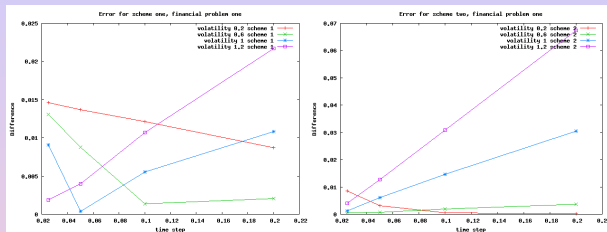


Figure: Erreur valeur du portefeuille

- Le schéma 2 (Cheridito) apparaît supérieur,
- Problème si volatilité σ choisie trop petite,
- Convergence lente si σ trop grand,
- Résultats confirmé par un problème de portefeuille en dimension 5.

Quelques précisions sur les paramètres de calculs

- Résultats obtenus par Malliavin et regression,
- 2 millions de particules utilisées
- $40 * 10$ mailles en dimension 2 (soit 1200 ddl)

Optimisation de portefeuille en dimension 5

Taux d'intérêt :

$$dr_t = \kappa(b - r_t)dt + \zeta dW_t^{(0)}.$$

2 actifs suivant un modèle à vol stochastique CEV

$$\begin{aligned} dS_t^{(i)} &= \mu_i S_t^{(i)} dt + \sigma_i \sqrt{Y_t^{(i)}} S_t^{(i)\beta_i} dW_t^{(i,1)}, \quad \beta_2 = 1, \\ dY_t^{(i)} &= k_i (m_i - Y_t^{(i)}) dt + c_i \sqrt{Y_t^{(i)}} dW_t^{(i,2)} \end{aligned}$$

Même problème d'optimisation de portefeuille.

EDP en dimension 5

On pose

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^r v &= \kappa(b-r)v_r + \frac{1}{2}\zeta^2 v_{rr}, \quad \mathbf{L}^Y v = \sum_{i=1}^2 k_i (m_i - y_i) v_{y_i} + \frac{1}{2}c_i^2 y_i v_{y_i y_i}, \\ \mathbf{L}^{S^1} v &= \mu_1 s_1 v_{s_1} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 s_1 y_1 v_{s_1 s_1}.\end{aligned}$$

L'EDP reformulée

$$\begin{aligned}-v_t - (\mathbf{L}^r + \mathbf{L}^Y + \mathbf{L}^{S^1})v - \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} + f((x, r, s_1, y_1, y_2), Dv, D^2v) &= 0, \\ v(T, x, r, s_1, y_1, y_2) &= -e^{-\eta x},\end{aligned}$$

$$f(x, z, \gamma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma_{11} - x_1 x_2 z_1 + \frac{((\mu_1 - x_2)z_1 + \sigma_1^2 x_4 x_3^{2\beta_1 - 1} \gamma_{1,3})^2}{2\sigma_1^2 x_4 x_3^{2\beta_1 - 2} \gamma_{11}} + \frac{((\mu_2 - x_2)z_1)^2}{2\sigma_2^2 x_5 \gamma_{11}}.$$

Résultats en 5D

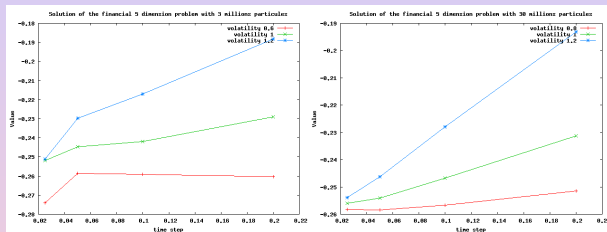


Figure: Problème d'optimisation de portefeuille en dimension 5 pour différentes volatilités, 3 et 30 millions de particules (méthode Cheridito and al et Régression)