

Méthodes mathématiques pour l'économie du risque et des externalités

5^{ème} Journée de la Chaire Finance et Développement Durable
et du Laboratoire Finance des Marchés de l'Énergie

René Aïd & Jean-Michel Lasry
EDF R&D - FiME Research Centre - CACIB - chaire FDD



Agenda

1 Revue des travaux

2 Focus

- Un modèle de prix de l'électricité
- Dynamique d'investissement

3 Perspectives

Les personnes : Académique, Ing.-ch., PhD & post-doc.

- Luciano Campi (P13, CREST)
- Gilles Chemla (CNRS, Imperial College, Dauphine)
- Alfred Galichon (X, CECO)
- Ivar Ekeland (University British Columbia, Dauphine)
- Philippe Février (CREST)
- Delphine Lautier (Dauphine, DRM-Finance)
- Bertrand Villeneuve (Dauphine, LEDA)
- Jean-Michel Zakoïan (CREST)
- René Aïd (EDF R&D)
- Corinne Chaton (EDF R&D)
- Amélie Mauroux (CREST)
- Benjamin Favetto (X)
- Franck Raynaud (Dauphine)

Revue des travaux réalisés

Thèmes/axes

- Gestion des risques et long terme
- Dynamique des marchés électricité et gaz
- Modélisation des prix de l'électricité

Gestion des risques et long terme

- Galichon, *The VaR at Risk*, **Int. J. Theoretical & Applied Finance**
- Ekeland, Galichon & Henry, *Comonotonic measures of risk*, **Math. Finance**
- A., Féron, Touzi & Vialas, *An Arbitrage-Free Interest Rate Model Consistent with Economic Constraints for Long-Term Asset Liability Management*, **Bankers, Markets & Investors**
- Chemla & Hennessy, *Privately Optimal Securitization and Socially Suboptimal Risk-Sharing*

Equilibre et dynamique du marché électricité

- Villeneuve & Zhang, *Merger Remedies and Industry Restructuring : A Case for Affirmative Action*
- A., Chemla, Porchet, Touzi, *Hedging & vertical integration in electricity markets*, **Management Science**
- Chaton, Hermon, Pignon, *A mecanism to encourage peak-load investment*, **OPEC Energy Review**
- Chaton & Guillerminet, *Competition and environmental policies in an electricity sector*, **Energy Economics**
- Lachapelle, Salomon & Turinici, *Computation of Mean Field Equilibria in Economics*, **Math. Models & Methods in Applied Scinces**

Equilibre et dynamique du marché du gaz

- Chaton, Creti & Villeneuve, *Some economics of seasonal gas storage*, **Energy Policy**
- Chaton, Creti & Villeneuve, *Storage and security of supply in the medium run*, **Resource & Energy Economics**
- Creti & Villeneuve, *Gas storage and security of supply*, **The Economics of Natural Gas Storage**, Springer
- Chaton & Durand-Viel, *Real Asset Valuation Based on Spot Prices : Can We Forget About Market Fundamentals ?*
- Durand-Viel & Villeneuve, *Strategic Capacity Investment under Holdup Threats : the Role of Contract Length and Width*

Modélisation des prix de l'électricité

- A., Campi, Nguyen Huu & Touzi, *A structural risk neutral model of electricity prices*, **Int. J. Theoretical & Applied Finance**
- A., Langrené & Campi, *structural risk neutral model of electricity prices*, **Math. Finance**
- Bouchard & Nguyen Huu, *No Marginal Arbitrage of the Second Kind for High Production Regime in Discrete Time Production-Investment Models with Proportionnal Transaction Costs*, **Math. Finance**
- Féron & Monfort, , *Joint econometric modeling of spot electricity prices, forward and options*, **Review of Derivatives Research**

Un modèle de prix de l'électricité structurel risque-neutre

Pour un actif **stockable**, la condition de non-arbitrage permet d'écrire la relation suivante entre prix au comptant S_t et prix à terme $F(t, T)$:

$$F(t, T) = e^{(r-y)(T-t)} S_t,$$

avec r le taux d'intérêt et y le rendement d'opportunité.

Cette relation a deux conséquences :

- la convergence du cours
- l'existence d'une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} rendant les prix martingales permettant d'écrire

$$F(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t]$$

Un modèle de prix de l'électricité structurel risque-neutre

Littérature sur la modélisation des prix de l'électricité

- suppose l'existence d'une probabilité martingale
- utilise la probabilité historique comme probabilité martingale

Objectif de ce modèle structurel risque-neutre (SRN)

Donner des réponses aux questions suivantes :

- que signifie l'absence d'opportunité d'arbitrage pour l'électricité ?
- comment étendre la relation classique d'arbitrage au cas de l'électricité ?

Idées

- utiliser la stockabilité des combustibles pour étendre l'absence d'opportunité d'arbitrage et définir une probabilité risque-neutre pour le prix de l'électricité
- utiliser la tension sur l'offre pour expliquer les pics de prix

Un modèle de prix de l'électricité structurel risque-neutre

Variables

n	combustibles, $1 \leq i \leq n$
D_t	demande (MW)
C_t^i	capacités (in MW)
S_t^i	prix des combustibles
h_i	rendement thermique ($h_i S_t^i$ en €/MWh, ↗ en i)

Coût marginal combustible simplifié

$$\hat{P}_t = \sum_{i=1}^n h_i S_t^i \mathbf{1}_{\left\{ \sum_{k=1}^{i-1} C_t^k \leq D_t \leq \sum_{k=1}^i C_t^k \right\}}$$

Illustration — Backtesting du modèle sur PowerNext

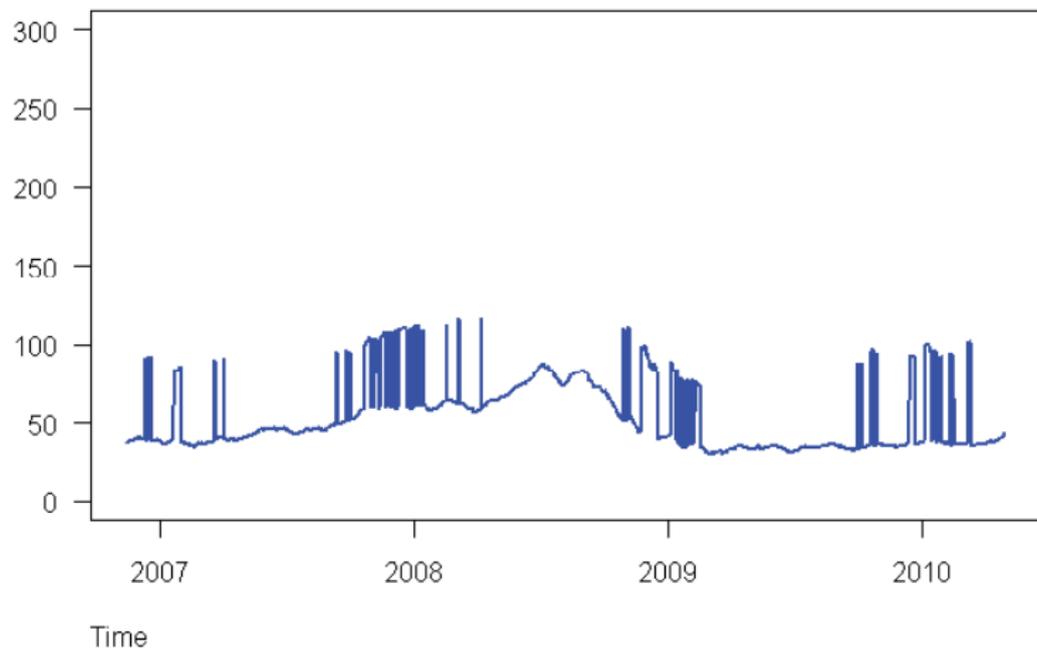


Illustration — Backtesting du modèle sur PowerNext

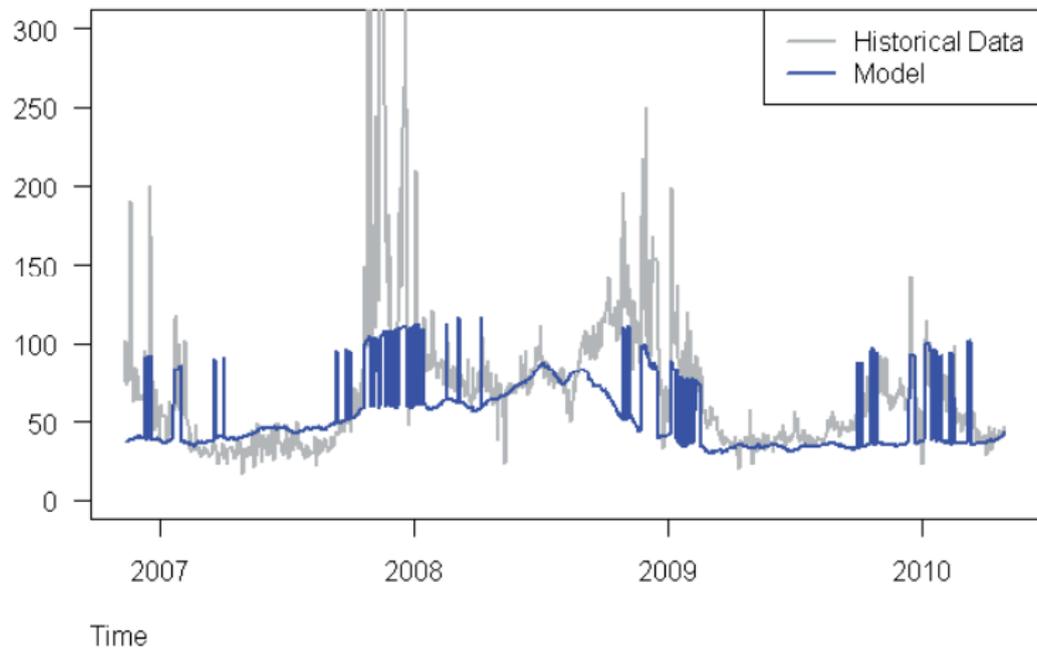
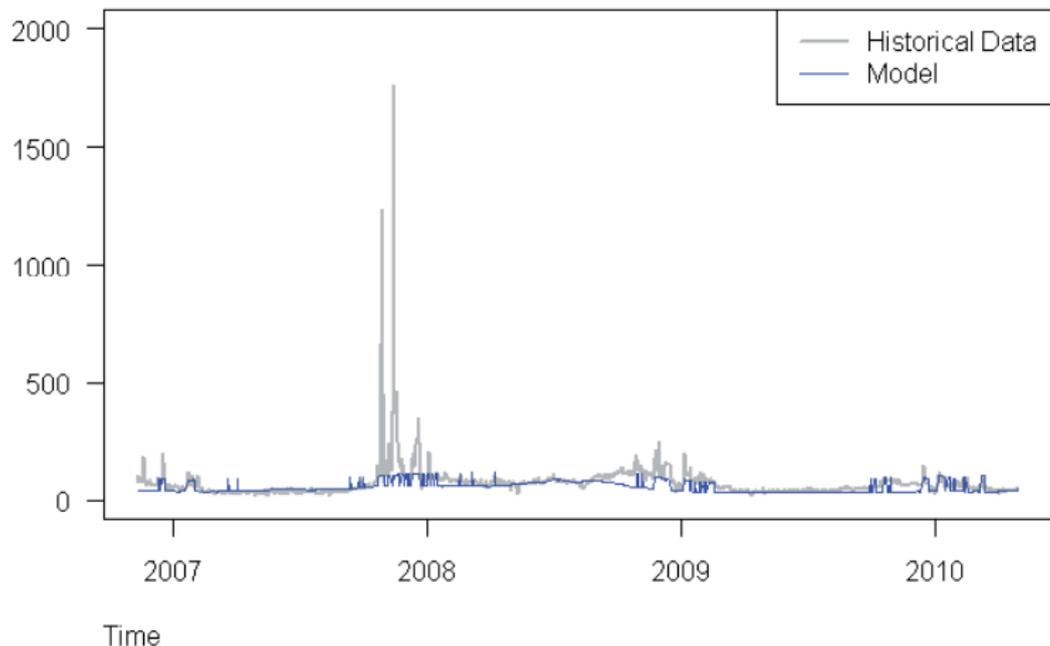


Illustration — Backtesting du modèle sur PowerNext



Du coût marginal au prix

- Coût marginal $\hat{P}_t := \sum_{i=1}^n h_i S_t^i \mathbf{1}_{\{\sum_{k=1}^{i-1} C_t^k \leq D_t \leq \sum_{k=1}^i C_t^k\}}$
- Capacité disponible $\bar{C}_t := \sum_{k=1}^n C_t^k$
- Les pics de prix se produisent quand le système électrique est sous pression, i.e. quand la marge résiduelle $\bar{C}_t - D_t$ est petite

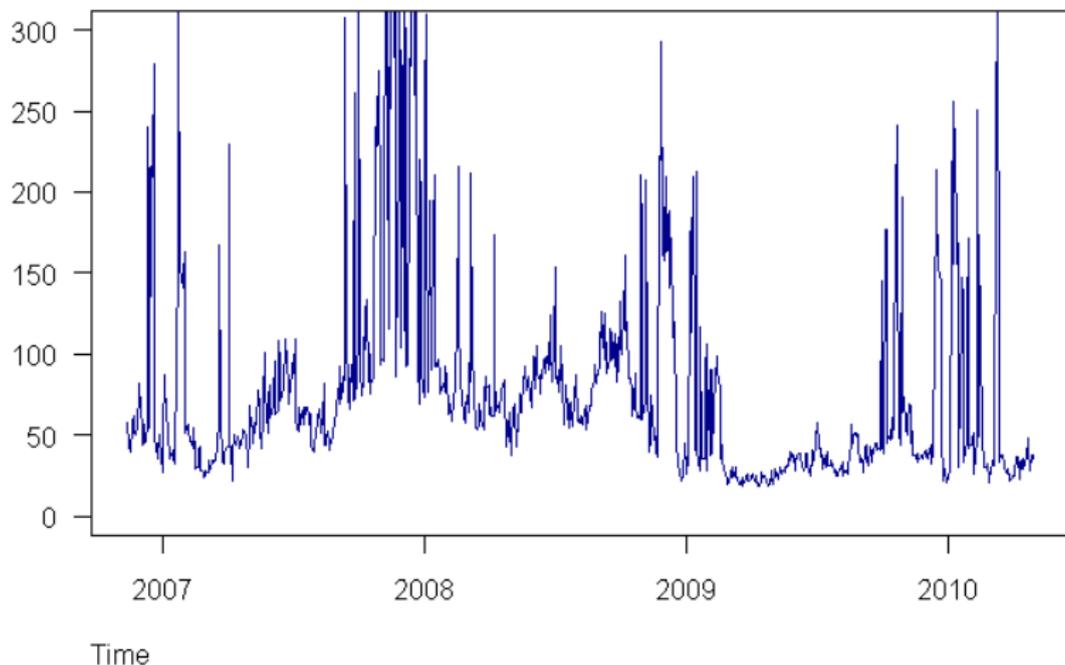
Le modèle

$$P_t = g(\bar{C}_t - D_t) \times \hat{P}_t$$

avec g la fonction de **rareté** $g(x) \approx 1/x$.

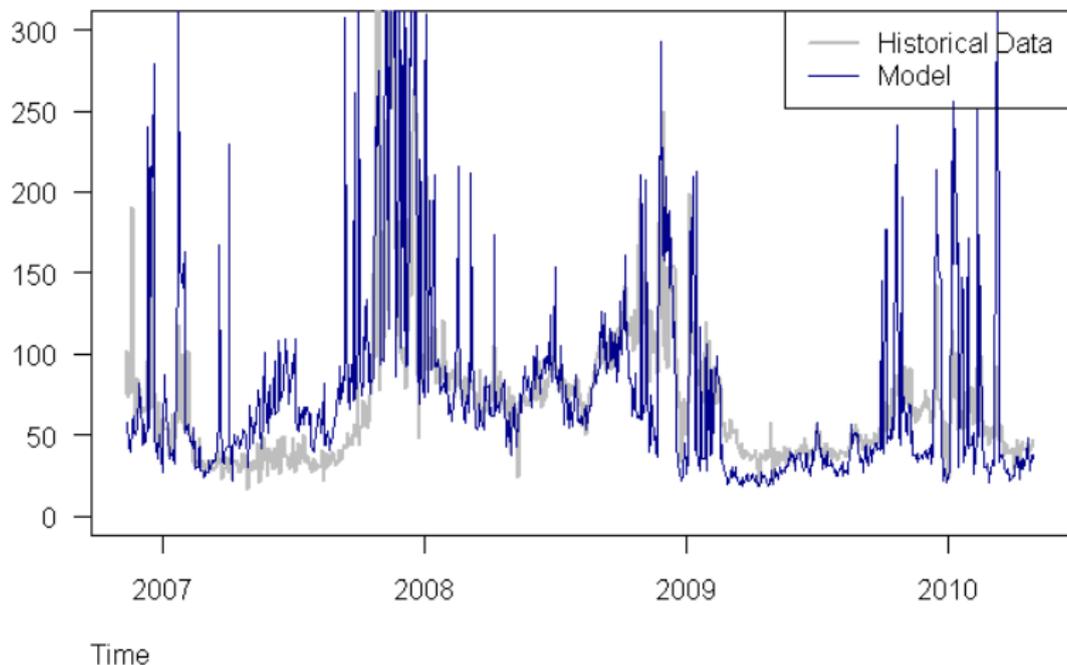
Conséquences : un modèle plus réaliste — Backtesting

Spot price (in €/MWh)



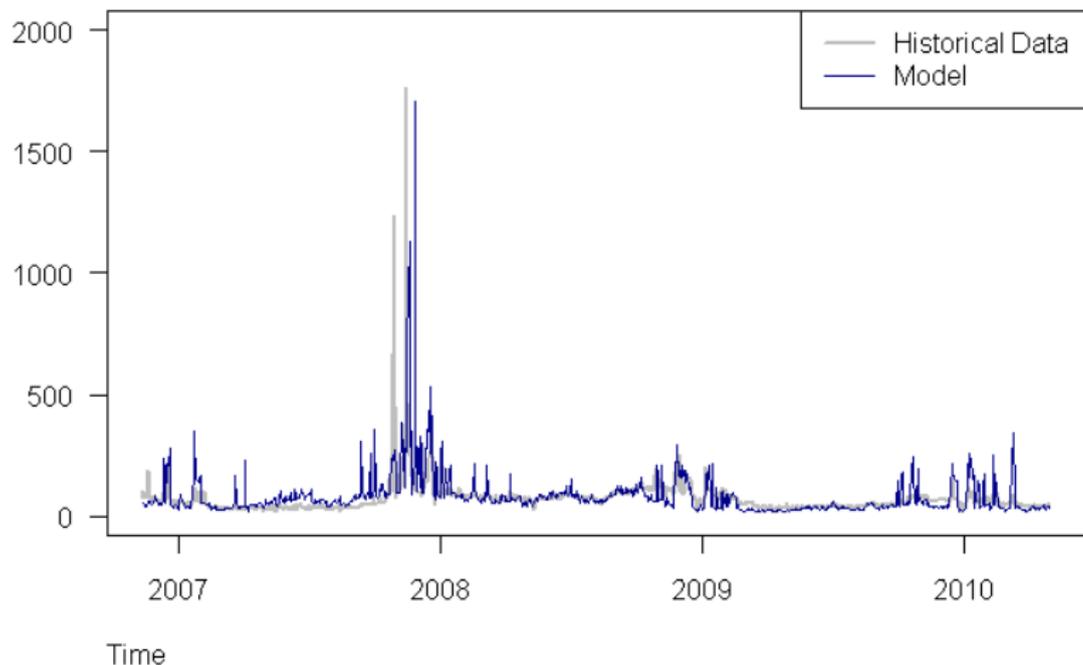
Conséquences : un modèle plus réaliste — Backtesting

Spot price (in €/MWh)

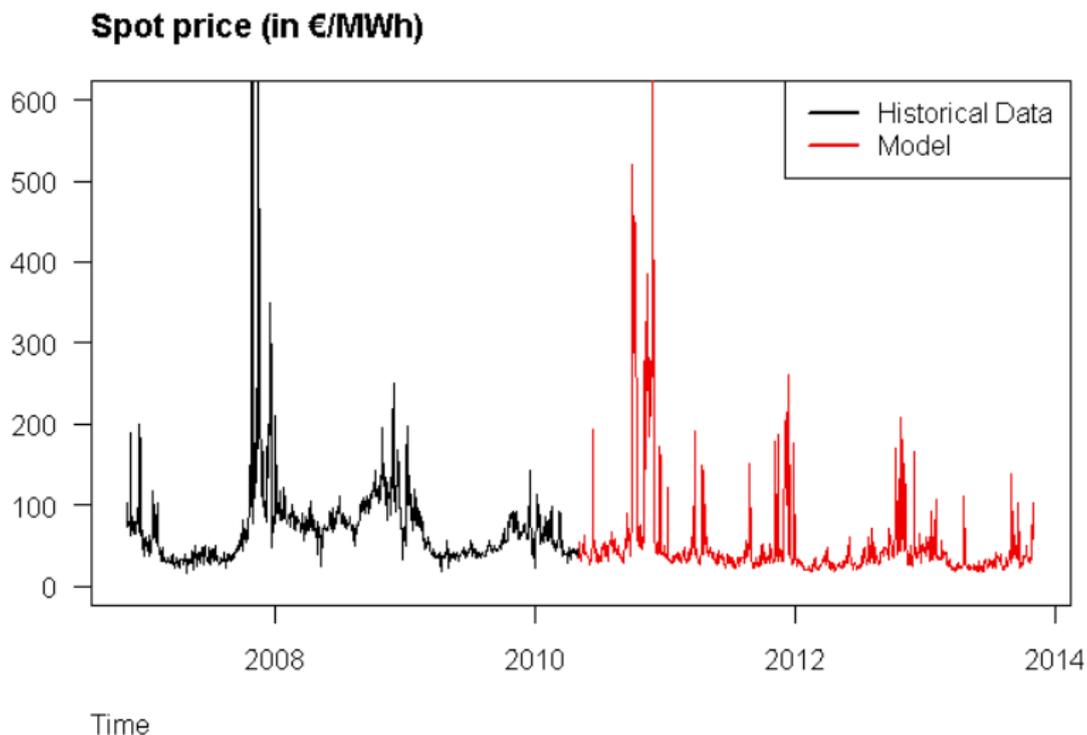


Conséquences : un modèle plus réaliste — Backtesting

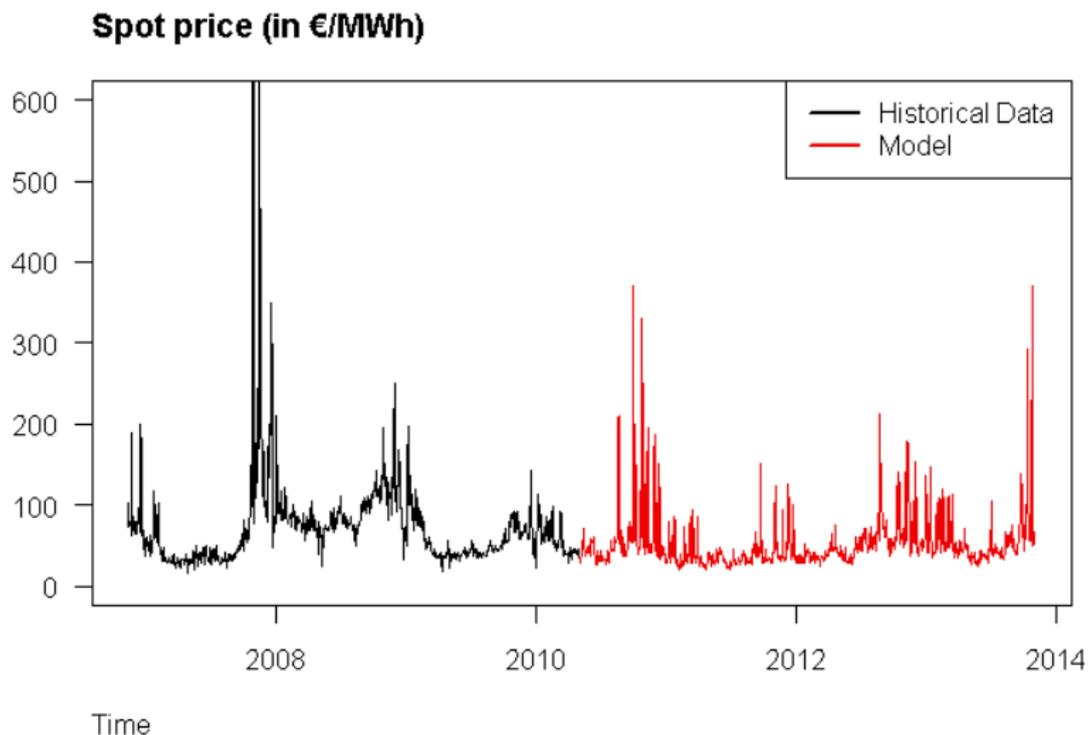
Spot price (in €/MWh)



Conséquences : un modèle plus réaliste — Simulation



Conséquences : un modèle plus réaliste — Simulation



Conséquences

un modèle où l'on peut donner un sens précis à la probabilité risque-neutre

- modèle de marché **incomplet** : besoin d'un **critère de couverture**
- notre choix : **Minimization du Risque Local**
- la probabilité risque-neutre pour les prix de l'électricité est le produit de
 - des probabilités risque-neutre pour les combustibles et
 - des probabilités historiques pour la demande et les capacités.
- ce modèle permet
 - de décomposer un dérivé entre partie couvrable (combustible) et partie non-couvrable (demande, capacité)
 - de donner des formules explicites pour les prix futures

Conséquences — Formules fermées pour les futures

$$F_t^e(T) = \sum_{i=1}^n h_i G_i^T(t, C_t, D_t) F_t^i(T)$$

$$G_i^T(t, C_t, D_t) = \mathbb{E}_t \left[g(\bar{C}_t - D_T) \mathbf{1}_{\{\sum_{k=1}^{i-1} C_T^k \leq D_T \leq \sum_{k=1}^i C_T^k\}} \right]$$

Traduction

- le prix d'un futures électricité est un panier de futures de combustibles
- Les poids de la combinaison linéaire dépendent de la fréquence prévisionnelle d'appel des différentes technologies et du **niveau de tension** au moment de leur appel

Alerte

Cette équivalence est valable loin de la livraison ($T - t \geq 15$ jours). Proche de la livraison, les aléas non-couvrables dominent.

Complément et extension

- dynamique de l'erreur de modèle (différence entre prix futures cotés et prix selon le modèle)
- critère alternatif de prix d'indifférence d'utilité
- modélisation des prix spot négatifs
- le fait que dans ce modèle, les prix au comptant dépendent des capacités ouvre la porte à la construction et la résolution **numérique** d'un **modèle d'investissement**.

Dynamique d'investissement en production d'électricité

Problème des investissements en électricité

- nombreux facteurs de risque et d'incertitude (demande, prix des combustibles, régulation...)
- nombreuses technologies possibles avec des caractéristiques très différentes (coûts, contraintes, délais de construction...)
- concurrences
- plusieurs critères possibles

Résolution

- problème ancien (et difficile...)
- problème traité par dégradation
- ou bien variante déterministe (recherche d'un parc optimal pour une trajectoire de demande et de prix des combustibles possibles)
- ou bien variante en boucle ouverte (recherche d'une politique optimale pour un ensemble de futures possibles)

Dynamique d'investissement

Approche

- Décomposition des difficultés
- Réalisation d'une suite de toy model pour étudier différents aspects du problème

Exemple : un toy-model mono-technologie avec délai

- Modèle ultra-simplifié de la maximisation du surplus social mais tenant compte de la présence d'un délai de construction.
- Permet de quantifier les cycles inaction/investissement et d'avoir une intuition quantitative des cycles sur les prix à long terme.
- Travail **en cours de développement** par A., Federico, Pham & Villeneuve.

Toy model d'investissement avec délai

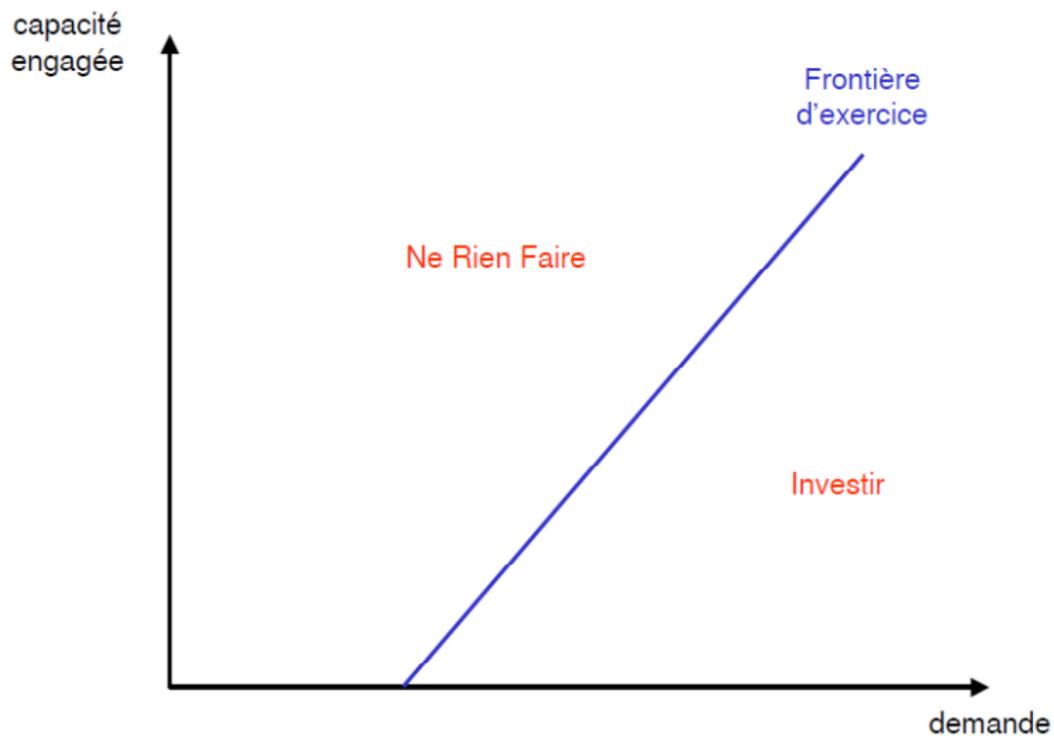
Caractéristiques

- Une seule technologie : capacité installée K_t
- Un seul aléa : la demande D_t supposé suivre un processus simple (brownien ou retour à la moyenne)
- Investissement irréversible
- Ajouter de la capacité de production coûte c par unité et prend une durée h
- objectif : minimisation de la somme actualisée de l'écart quadratique entre demande et capacité. Est équivalent à la maximisation du surplus social.

Ce cadre simplifié permet

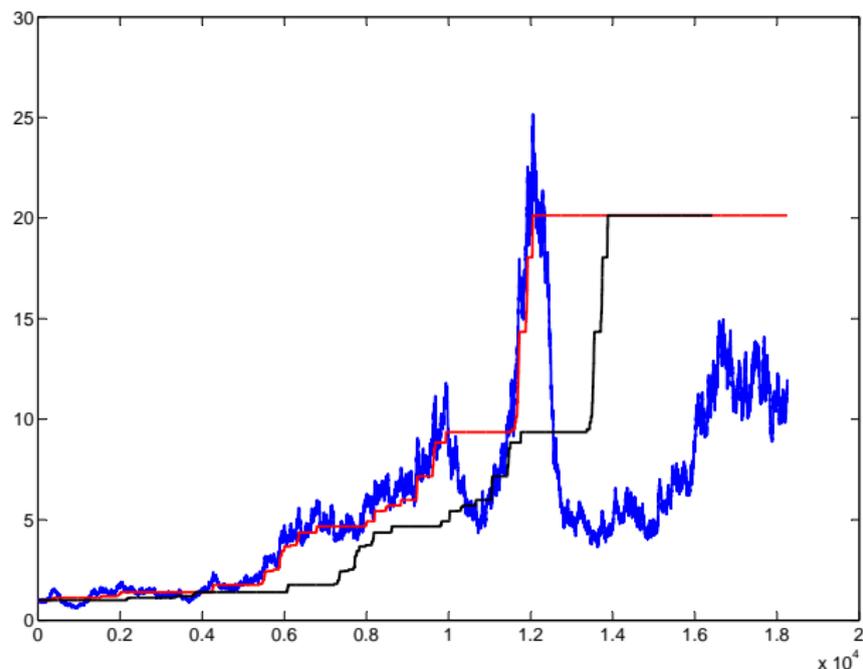
- une caractérisation complète de la dynamique optimale d'investissement
- une quantification de l'effet du délai sur cette dynamique
- une caractérisation de la dynamique de prix à long terme de la capacité

Toy model d'investissement avec délai



Toy model d'investissement avec délai

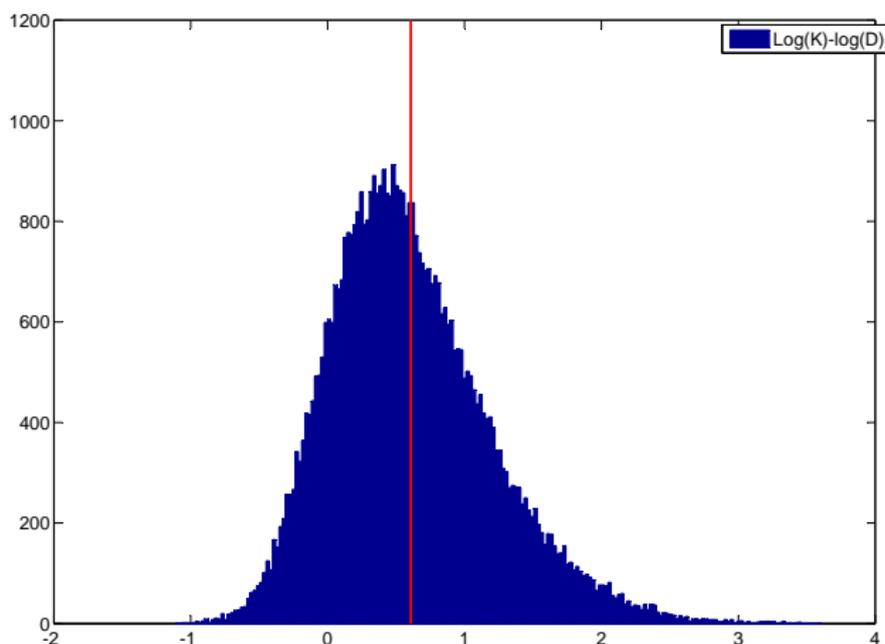
Trajectoire d'investissement pour une demande GBM et un délai de construction de 5 ans.



Capacité engagée. Capacité installée.

Toy model d'investissement avec délai

Accès aux **distributions**.



Densité de la différence des logs entre la capacité installée et la demande à une date donnée (ici $T = 40$ ans)

Le toy model : entre le calcul de coin de table & et le code de calcul

Ils permettent

- de se focaliser sur **un** aspect d'un problème de dynamique économique
- de se construire quantifier au premier ordre une intuition
- de développer ses compétences en modélisation

Attention

- Toy model n'implique pas résolution analytique
- Ils peuvent demander des méthodes numériques élaborées...
- ... dont certaines sont développées dans la chaire FDD et le laboratoire FiME.

Un exemple de toy model plus complexe

Multi-technologies sans délai

- Modèle de dynamique d'investissement posé sous la forme d'un problème de contrôle optimale stochastique **mais sans prise en compte des délais** fondé sur le modèle de prix SRN.
- Le critère est un critère de maximisation de la valeur des investissements et pas de satisfaction de la demande.
- Trois technologies + la demande + les pannes + les prix des combustibles + le CO₂. **Dimension 9**.
- Réalisé dans la thèse de Nicolas Langrené (dir. H. Pham P7 & L. Campi P13)

Mais également...

Des modèles faisant appel aux mêmes méthodes mathématiques

- analyse des relations entre dynamique d'investissement, liquidité et couverture (Xavier Warin & Stéphane Villeneuve, IDEI)
- dimensionnement du stockage d'énergie électrique pour faire face à la production intermittente non-contrôlable (stage de Master 2)
- contrôle de la dynamique d'investissement en tenant compte de la probabilité de défaillance (stage de Master 2 encadré par Nadia Oudjane)
- coordination pénalité et taxe carbone (en cours avec Nizar Touzi)

Sans perdre de vue, bien sûr,...

... qu'un modèle n'est qu'un modèle.



Dilbert, 22 juillet 1992, copyright Scott Adams.