



21-12-2012

GDF SUEZ

BY PEOPLE FOR PEOPLE

Stratégies de couverture financière “optimales au sens de l’entropie” en présence de frictions de marché

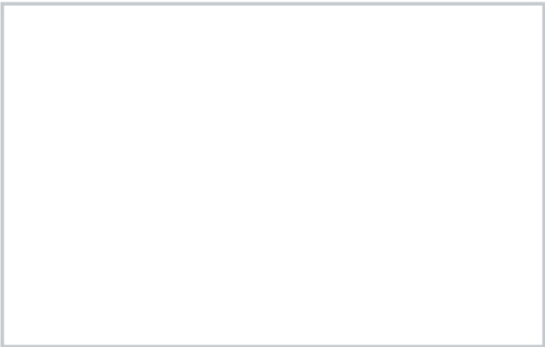
Sébastien Chaumont (GDF-Suez)
Clément Ménassé (UPMC)

CEEME

Centre d'Expertise en Etudes et Modélisations Economiques

Sommaire

The logo for GDF SUEZ, featuring the company name in a sans-serif font with a stylized blue and green wave graphic underneath.

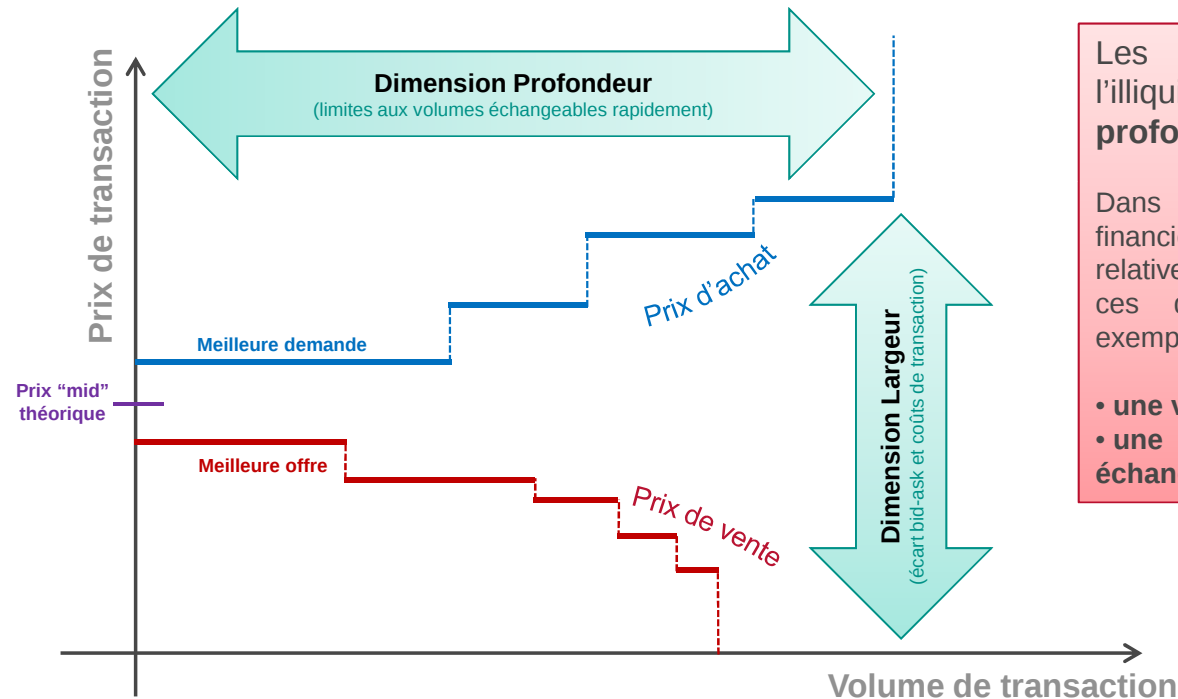
- 
- A large teal rectangle with a horizontal light gradient and a thin red line near the top, positioned on the left side of the slide.
- 
- An empty white rectangle with a thin grey border, located at the bottom left of the slide.
- 1) Introduction : l'illiquidité et ses impacts sur la couverture financière
 - 2) Un modèle stylisé de gestion de portefeuille dans un marché avec frictions
 - 3) Solutions explicites en marché complet
 - 4) Solutions approchées en marché avec frictions

Le phénomène **illiquidité**, et les « frictions de marché ».

GDF SUEZ

Un phénomène important sur les marchés énergétiques, mais pas de théorie générale (consensuelle) en mathématiques financières.

Sur les bourses d'échanges réelles, pour un produit donné il y a plusieurs prix, en fonction du volume que l'on veut échanger – **le carnet d'ordres** est mis à jour "continûment". Sur les marchés OTC, le carnet d'ordres peut être réduit à un petit nombre de prix indicatifs de brokers.



Les deux premiers aspects de l'illiquidité sont **largeur** et **profondeur**⁽¹⁾.

Dans le but d'optimiser des stratégies financières, on propose un **modèle** relativement simple qui prend en compte ces deux aspects. Comme premier exemple, on prendra en compte :

- une valeur "typique" d'écart bid-ask
- une limite "typique" aux volumes échangeables en un jour

(1) Il y a également des aspects temporels (résilience, ...), la difficulté d'échanger de très petits volumes...

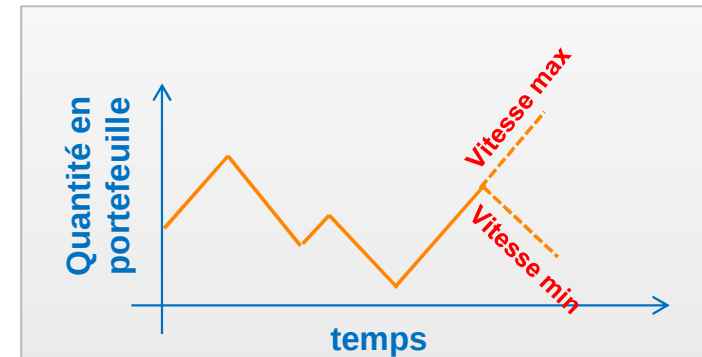
Un modèle simple « et efficace » de frictions en temps continu

GDF SUEZ

En théorie dans un marché **complet**, on peut modifier **instantanément** la composition d'un portefeuille, sans frais.

Dans un marché **avec frictions** on suppose que les transactions ne se font qu'à vitesse limitée :

Pendant un intervalle de temps Δt , le volume absolu de transaction ne peut excéder $q_{\max} \times \Delta t$, pour une constante donnée $q_{\max}$ caractéristique du marché.



En temps continu, la trajectoire de la quantité en portefeuille est continue (et à dérivée bornée).

Inconvénients	Avantages
• Ajout d'une dimension au problème, la quantité détenue en portefeuille devient un état du système (inévitables pour prendre en compte les frictions) : le contrôle porte sur la vitesse et non la position. • Ce n'est pas une hypothèse classique	• Programmation dynamique simplifiée (phénomène de contrôle optimal "presque" bang-bang, problème "presque" linéaire) • permet d'inclure dans l'algorithme d'optimisation des coûts de transaction instantanés, qui dépendent du volume instantané échangé.

Problème d'**optimisation de portefeuille** de couverture d'un bien contingent en temps continu

GDF SUEZ

Marché complet :
tous les risques
financiers peuvent

~~être éliminés.~~

*"Il existe une seule
probabilité risque-
neutre."*

Première idéalisation des marchés financiers : les marchés complets.

- fortes hypothèses

Souvent irréalistes, en particulier dans les marchés de l'énergie.

- mais grand intérêt pédagogique

La plupart des questions ont une réponse simple.

Deux approches
complémentaires
(pricing &
hedging)

Approche « primale » :

Programmation dynamique

(en temps continu : équation d'HJB)

« Malédiction de la dimensionalité »

L'approche nécessite un cadre « markovien », d'où une dépendance exponentielle au nombre de facteurs de risque.

Approche « duale » :

Calcul d'espérance sous la mesure risque-neutre.

Simple et efficace !

Problème d'**optimisation de portefeuille** de couverture d'un bien contingent en temps continu

GDF SUEZ

Marché complet :
tous les risques
financiers peuvent

être éliminés.

"Il existe **une seule**
probabilité risque-

Risques externes

**Marché à
information
incomplète :**
Présence de risques
qu'il est impossible de

couvrir (climat,
régulation).
"Il existe **plusieurs**
probabilités risque-
neutre."

De nombreux travaux en finance pour étendre le cadre des marchés complets : introduction de risques extérieurs au marché.

- Plus réaliste

Les risques ne peuvent jamais être totalement éliminés.

- Plus complexe

Dépend du choix arbitraire d'une façon de mesurer les risques.

Beaucoup de modèles mais aucun n'a connu le succès de Black-Scholes

Approche « primale » :

Programmation dynamique

(en temps continu : équation d'HJB)

Malédiction de la dimensionalité

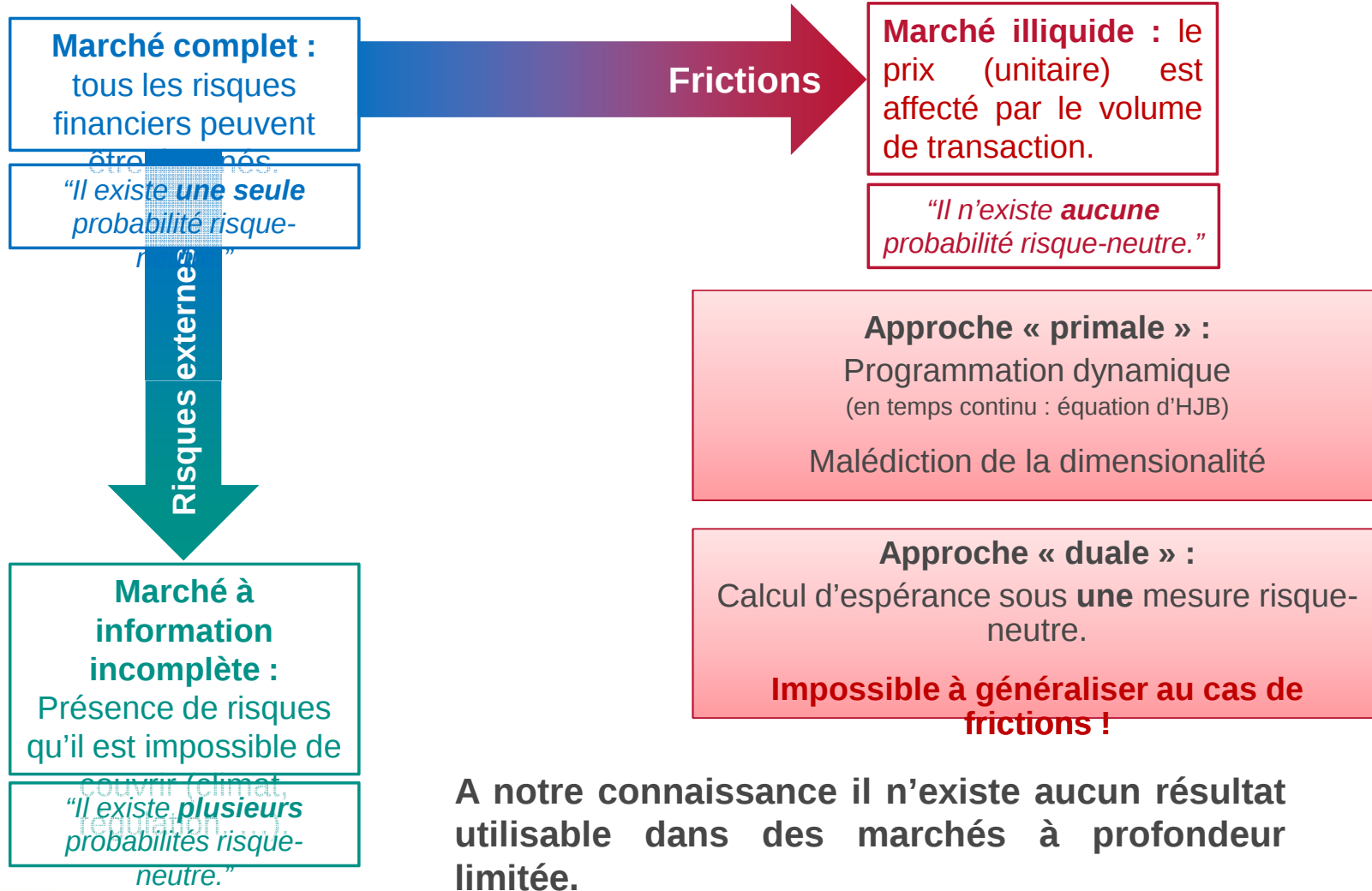
Approche « duale » :

Calcul d'espérance sous **une** mesure risque-neutre.

Le choix d'une mesure particulière correspond à un certain profil d'aversion au risque. Convergence des deux approches dans le cadre de la maximisation d'espérance d'utilité.

Problème d'**optimisation de portefeuille** de couverture d'un bien contingent en temps continu

GDF SUEZ



Un modèle de gestion de portefeuille stylisé



On cherche une stratégie “optimale” ...

Dans la classe des stratégies dont les décisions ne dépendent que de

Variables d'état	x	Prix actuel (1 seul produit, pour 1 maturité donnée)
	$\tau=(T-t)$	Temps-à-maturité actuel
	q	Position actuelle (quantité forward détenue en portefeuille)
	c	Cash-Flow accumulé (capital actuel)

Si le monde est modélisé avec :

Objectif	H	Pay-off (ou volume) terminal Donné comme une fonction du prix forward à maturité (spot), pour une période de fourniture donnée.
Vue de marché	σ	Volatilité (ou structure à terme dépendant de τ)
	μ	Moyenne long-terme
	λ	Vitesse de reversion vers μ
Frictions de marché	K	Coûts de transaction (bid-ask spread)
	q_{min}, q_{max}	Bornes sur la vitesse instantanée de transaction (volumes de transaction limités)
Contraintes de portefeuille	Q_{min}, Q_{max}	Contraintes de volume globale (stricte ou pénalité) (exposition min/max autorisée)

Cet ensemble de paramètres reflète les paramètres pris en compte par un gestionnaire de portefeuille dans l'élaboration de ses stratégies opérationnelles (dans le contexte de la gestion d'un seul produit de marché).

Dans ce cadre, on sait calculer rapidement avec précision la stratégie qui atteint le compromis optimal risk/return désiré (par la résolution d'une équation d'HJB 2D).

Plus précisément, le critère d'optimisation est de maximiser **l'utilité espérée exponentielle de la richesse terminale** (ou son équivalent certain), ou de manière équivalente, minimiser la mesure de risque entropique.

L'hypothèse d'aversion au risque absolue constante (CARA) implique que les décisions optimales sont les mêmes quelque soit le capital actuel. Ceci donne lieu à une simplification numérique importante.

Deux résultats



- En marché complet (sans frictions), on obtient des solutions **explicites** (stratégies optimales que l'on peut voir comme une extension de la stratégie delta-hedging (Black-Scholes) qui tient compte de l'aversion au risque du gestionnaire de portefeuille)
- En marché avec frictions, on a des solutions approchées. On constate que l'impact des frictions n'est pas trivial : tous les paramètres ont des impact interdépendants (en particulier, largeur et profondeur).

Portefeuille autofinancé dans un marché sans frictions

Problème de contrôle optimal stochastique de dimension 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ dV_t = q_t dX_t = q_t b(t, X_t)dt + q_t \sigma(t, X_t)dW_t \\ u(t, x, v) = \sup_{(q_s)_{s \in [t, T]}} \mathbb{E} \left[U \left(V_T + h(X_T) \right) \mid X_t = x, V_t = v \right] \end{array} \right.$$

prix du sous-jacent

valeur d'un portefeuille autofinancé
(q est le contrôle)

$h(x)$: payoff (cash-flow terminal à couvrir)
 $V_T + h(X_T)$: richesse terminale du gestionnaire
 U : fonction d'utilité (critère d'optimisation)

HJB :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(T, x, v) = U(v + h(x)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \sup_q \left[b \cdot u_x + q b \cdot u_v + \frac{1}{2} \sigma^2 u_{xx} + q \sigma^2 u_{xv} + \frac{1}{2} q^2 \sigma^2 u_{vv} \right] = 0 \end{array} \right.$$

Comme le portefeuille dépend (instantanément) linéairement de q , le sup dans HJB porte sur une forme quadratique en q . On a donc une formule pour le contrôle optimal en termes de u_v, u_{xv}, u_{vv} .

Représentation duale en marché complet sous utilité exponentielle : Notion d'entropie relative

GDF SUEZ

On définit l'entropie relative $\mathbb{Q}||\mathbb{P} : S = S(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\log(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]$

- Représente la quantité d'information nécessaire pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{P}$
- Si $b = 0$ alors $S = 0$ ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ contiennent la même information)

Par Girsanov, on a :

$$S = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{2} \int_t^T \frac{b^2(s, X_s)}{\sigma^2(s, X_s)} ds\right]$$

Représentation duale en marché complet sous utilité exponentielle : Equivalent certain maximal

GDF SUEZ

$$V^*_{T+h}(X_T) = I(\lambda \frac{dQ}{dP})$$

$I(y) = -f'(y)$ où f est la transformée de **Legendre Fenchel** de U :

$$f(y) = \sup_{w \in \mathbb{R}} (U(w) - yw)$$

$\lambda = \lambda(t, x, v)$ caractérisé par :

$$\mathbb{E}^Q[I(\lambda \frac{dQ}{dP})] = v + \mathbb{E}^Q[H] = v + p(t, x)$$

Avec l'utilité exponentielle, on obtient :

$$\underbrace{U^{-1}(u(t, x, v))}_{\text{Équivalent certain maximal de la richesse terminale}} = \underbrace{v}_{\text{Valeur initiale du portefeuille de couverture}} + \underbrace{p(t, x)}_{\text{Prix du bien à couvrir}} + \underbrace{1/\beta}_{\text{Tolérance au risque}} \cdot \underbrace{S(t, x)}_{\text{Entropie relative}}$$

Représentation duale + HJB en marché complet sous utilité exponentielle : Solutions explicites

GDF SUEZ

En utilisant la caractérisation du contrôle optimal par HJB, on obtient :

$$\underbrace{q^*(t,x)}_{\text{Quantité optimale à détenir en portefeuille}} = \underbrace{-\Delta(t,x)}_{\text{Delta (couverture parfaite)}} + \underbrace{1/\beta}_{\text{Tolérance au risque : somme investie dans ...}} \underbrace{\left(b/\sigma^2 - \partial S/\partial x \right)}_{\text{... une stratégie "purement spéculative" unique (qui ne dépend que de } b \text{ et } \sigma \text{).}}$$

Mouvement brownien géométrique :

$$q^* = -\mathcal{N}(d_1) + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2 x}$$

Processus d'Ornstein Uhlenbeck :

$$q^* = -\mathcal{N}(d) + [1 + \kappa(T-t)] \frac{\kappa(\mu - x)}{\gamma\sigma^2}$$

avec $d_1 = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ $d = \frac{x_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}$ et $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$

La formule de Black & Scholes apparaît comme un cas particulier dans le cas d'une aversion au risque infinie (possible uniquement en marché complet).

Portefeuille autofinancé dans un marché sans frictions

Problème de contrôle optimal stochastique de dimension 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ dV_t = q_t dX_t \\ u(t, x, v) = \sup_{(q_s)_{s \in [t, T]}} \mathbb{E} \left[U \left(V_T + h(X_T) \right) \mid X_t = x, V_t = v \right] \end{array} \right.$$

Dans un marché sans frictions, le système (X_t, V_t) est markovien:

La position initiale q_t n'a pas d'importance puisque l'on peut passer de

$$V_t = q_t X_t + c_t$$

à

$$V_t = q'_t X_t + c'_t$$

instantanément sans coûts, avec $c'_t = c_t - (q'_t - q_t) X_t$.

Portefeuille autofinancé dans un marché avec frictions

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

$$dV_t = q_t dX_t - k |dq_t/dt| X_t dt$$

exemple : coûts de transactions

En temps continu, problème si q n'admet pas de variations finies...

Dans un marché avec frictions, seul le système (X_t, V_t, q_t) est markovien car la vitesse instantanée de trading dq_t/dt intervient dans l'EDS du portefeuille.

Portefeuille autofinancé dans un marché avec frictions

Problème de contrôle optimal stochastique de **dimension 3** :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ dV_t = q_t dX_t - k|dq_t/dt|X_t dt = q_t dX_t - k|\alpha_t|X_t dt \\ dq_t = \alpha_t dt \end{array} \right.$$

Hypothèse simple : on suppose que q admet des variations finies

$$u(t, x, v, q) = \sup_{(\alpha_s)_{s \in [t, T]}} \mathbb{E} \left[U \left(V_T + h(X_T) \right) \mid X_t = x, V_t = v, q_t = q \right]$$

On introduit explicitement la dépendance en q (qu'il est impossible d'éviter dans le cas de frictions) et on utilise la vitesse instantanée α comme variable de contrôle.

Cette hypothèse permet de traiter à la fois des coûts de transaction et des limites de volumes instantanés.

Analogie avec le problème de gestion d'un "swing en temps continu".

Portefeuille autofinancé dans un marché avec frictions

Astuce 1 : Hypothèse de vitesse finie : $dq_t = \alpha_t dt$

Permet de représenter les frictions sans singularités (« mais » impose une profondeur de marché finie incompatible avec un marché complet).

Astuce 2 : Maximiser l'utilité exponentielle, par construction, conduit aux mêmes décisions quelque soit la richesse initiale : la dépendance en V_t est triviale (e.g. la stratégie optimale n'en dépend pas)
... mais crée une dépendance exponentielle par rapport au prix initial (source d'instabilité numérique)

Astuce 3 : Considérer (X_t, q_t, c_t) au lieu de $(X_t, q_t, V_t = q_t X_t + c_t)$ est plus naturel avec l'utilité exponentielle et donne une équation plus simple (pas de dérivées croisées d'ordre 2)

Astuce 4 : Considérer l'équivalent certain maximal au lieu de l'utilité espérée maximale donne une équation plus simple et supprime la dépendance exponentielle.

(dans le même ordre d'idée, pour une diffusion géométrique, le changement de variable $X_t \rightarrow \log(X_t)$ donne une équation plus stable)

Astuce 5 : Le domaine doit être tronqué dans certaines dimensions (prix), et il faut une condition au bord "artificielle" pour que le problème soit bien posé. **Imposer une contrainte au bord artificielle sur la dérivée d'ordre 3**, au lieu de l'ordre 0 (Dirichlet) ou de l'ordre 1 (Neumann), donne d'excellents résultats.

(idée inspirée par le fait que la solution explicite obtenue en négligeant les frictions a une dérivée d'ordre 3 nulle)

Portefeuille autofinancé dans un marché avec frictions

L'équivalent certain maximal est caractérisé par une condition terminale simple :

$$\mathcal{C}(T, x, q, c) = qx + c + h(x)$$

et une EDP (doublement) non-linéaire où les 3 aspects de la modélisation sont séparés :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + \mathcal{L}\mathcal{C}} \quad \boxed{- \beta \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial x^2}} \quad \boxed{+ \alpha^{\max} \left| \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q} - x \right|} = 0$$

Aspect **diffusion**

Seul, ce terme correspondrait
à l'espérance du payoff
(aversion au risque infinie).

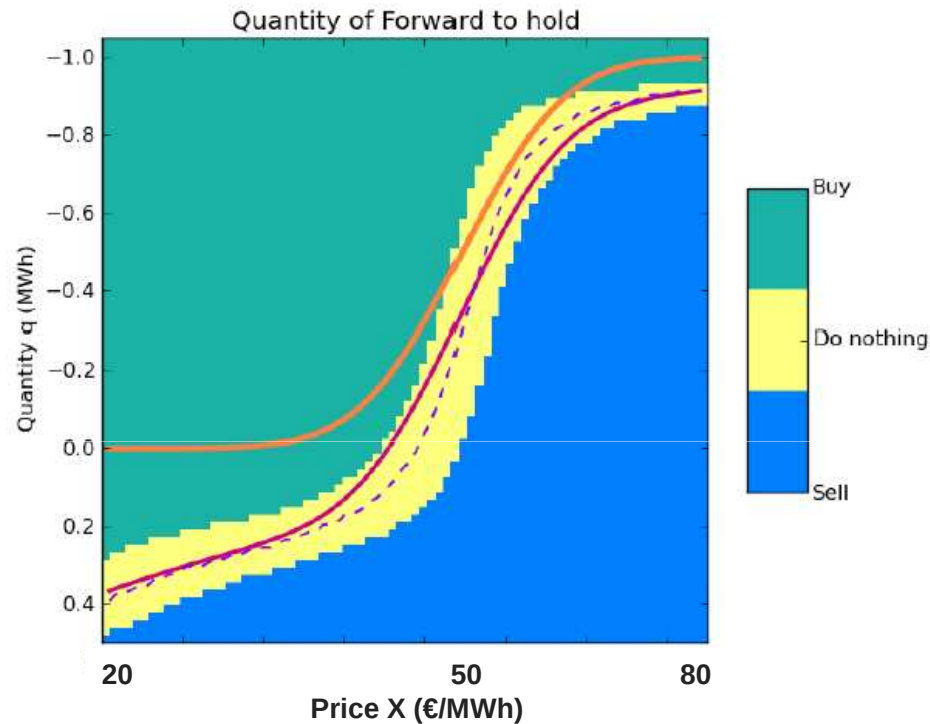
$$\mathcal{L}\mathcal{C} = b \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial x^2}$$

Aspect **aversion au risque**
 $\beta = \text{C.A.R.A.}$

Aspect **liquidité**
(ici, uniquement une
contrainte de vitesse
limite $\alpha^{\max}$)

Illustration d'un résultat numérique

GDF SUEZ



Couverture d'un call (long)

Strike $K=50$ €/MWhBrownien géométrique $\sigma=0.3$

— Delta-hedging marché complet (Black et Scholes)

Hypothèse de tendance $\mu=0.1$ Aversion au risque $\beta=0.5$

— Stratégie optimale marché complet (exploitant la tendance en accord avec l'aversion au risque)

En présence de coûts de transaction (ici $k=0.1$), il est connu que la stratégie optimale est une **hystérèse** : il apparaît une zone de non-transaction (dont la largeur est croissante avec les coûts de transaction et l'aversion au risque), dans laquelle on doit rester.

En présence d'une profondeur limitée (ici $q_{\max}=0.5$), cette zone devient une **cible** dont on doit chercher à se rapprocher aussi vite que possible.

Quelques résultats obtenus avec ce prototype

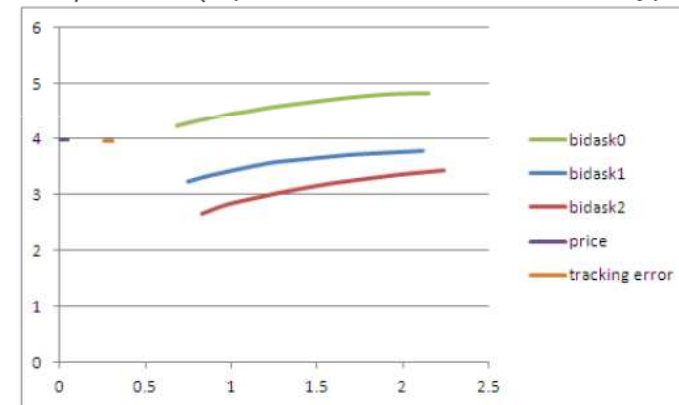
GDF SUEZ

- Comparaison des performances de ces stratégies optimales avec des stratégies opérationnelles, qui ont permis d'améliorer la pratique.
- Etude de l'impact de contraintes de type "pas de vente à découvert" (comparaison des performances d'une optimisation avec et sans contrainte).

• **Description quantitative de la frontière efficace**, que l'on peut théoriquement atteindre, en fonction de différents modèles simples de marché (Black-Scholes, oscillation aléatoire autour d'un prix long-terme), différents types d'exposition simple (exposition fixe, call, ...), et en tenant compte des frictions de marché.

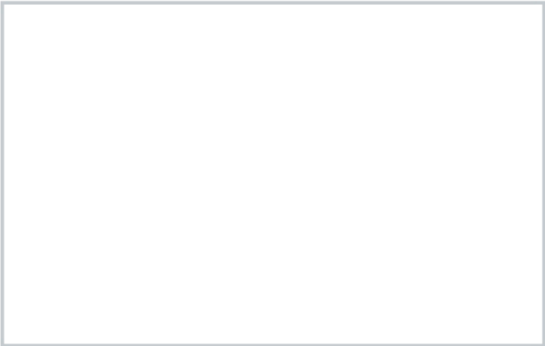
• Description quantitative des aspects "graphiques" des stratégies optimales, en fonction des hypothèses (en particulier impact d'une vue de marché, de la profondeur et de la largeur de marché)

Risk/Reward (espérance en fonction de l'écart-type)





Merci pour votre attention !



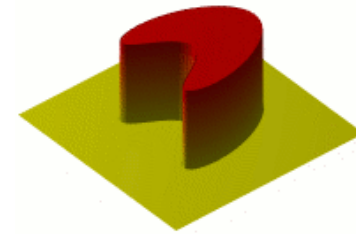
L'équation de la chaleur

Soit $u(t,x)$ la température (en °) à l'instant t (en s) en un point x (en m) sur une barre infiniment fine de longueur infinie, faite d'un matériau de coefficient de diffusivité thermique uniforme $\frac{1}{2}$ (en m^2/s), sans source thermique ni convection.

Fourier (Théorie analytique de la chaleur, 1811)

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0,x) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2} u''(t,x) = \frac{1}{2} \Delta u(t,x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{condition initiale en } t=0 \\ \text{E.D.P. pour } t>0 \end{array}$$

Illustration en dimension 2 (évolution de la température dans une plaque de métal initialement chauffée) :
Source Wikipedia



Opérateur **Laplacien**

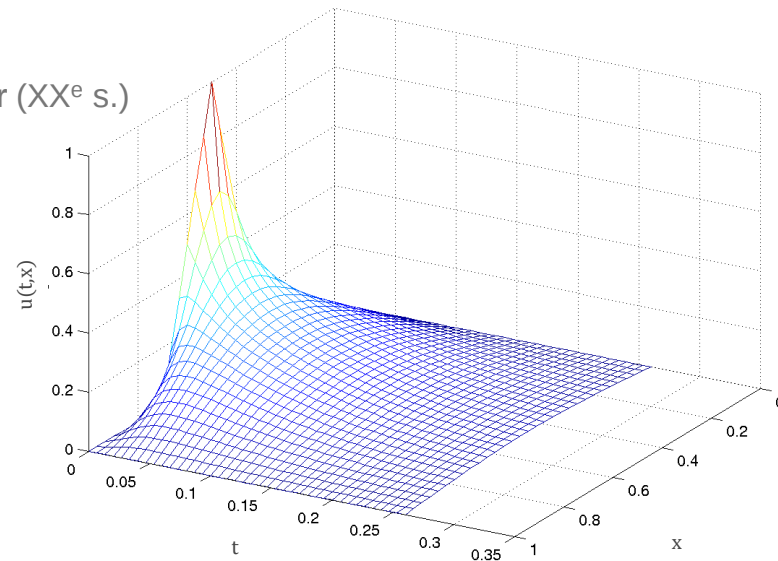
$$\Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Interprétation probabiliste de l'équation de la chaleur (XX^e s.)

$$u(t,x) = \mathbb{E} \left[\varphi(W_t) \mid W_0 = x \right]$$

où W est un **mouvement brownien**

Démonstration : formule d'Itô et espérances conditionnelles



L'EDP de Black-Scholes

est une équation de la chaleur rétrograde pour une diffusion plus générale qu'un mouvement brownien

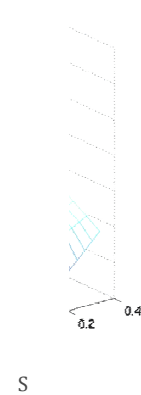
GDF SUEZ

Soit $V(t,S)$ le prix d'une option Européenne de maturité T , à l'instant t , pour un prix du sous-jacent S .

EDP de Black Scholes

$$\left\{ \begin{array}{ll} V(T,S) = \text{payoff}(S) = (S-K)^+ & \text{condition terminale en } t = T \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V'' + rSV' - rV = 0 & \text{E.D.P. pour } t < T \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$



Description probabiliste en termes d'espérance de fonctionnelle de la dynamique de S :

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_t = S_t(r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}) \\ V(t,S) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\text{payoff}(S_T) e^{-r(T-t)} \mid S_t = S \right] \end{array} \right.$$

La formule générale de Feynman-Kac

Une formule de correspondance entre des espérances de fonctionnelles et des EDP linéaires.

GDF SUEZ

Soit $u(t,x)$ la solution d'une ...

EDP parabolique linéaire du second ordre avec condition terminale

$$\left\{ \begin{array}{l} u(T,x) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + b(t,x) \cdot \nabla u + \frac{1}{2} \text{trace} \{ \sigma \sigma^*(t,x) \nabla^2 u \} + f(t,x) - ru = 0 \quad \forall t < T, x \in \mathbb{R}^d \end{array} \right.$$



Interprétation probabiliste en termes d'espérance de fonctionnelle de la dynamique de X :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ u(t,x) = \mathbb{E} \left[\varphi(X_T) e^{-r(T-t)} + \int_t^T f(s, X_s) e^{-r(T-s)} ds \mid X_t = x \right] \end{array} \right.$$

L'EDP d'Hamilton-Jacobi-Bellman

est une généralisation de la formule de Feynman-Kac dans le cadre du contrôle optimal stochastique



Soit $u(t,x)$ la solution d'une ...

EDP parabolique non-linéaire du second ordre avec condition terminale de la forme :

$$\begin{cases} u(T,x) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \sup_{\alpha} \left[b(t,x,\alpha) \cdot \nabla u + \frac{1}{2} \text{trace} \{ \sigma \sigma^*(t,x,\alpha) \nabla^2 u \} + f(t,x,\alpha) - ru \right] = 0 \end{cases}$$



Problème de contrôle optimal stochastique

dont u est la "fonction valeur" :

$$\begin{cases} dX_t^\alpha = b(t, X_t^\alpha, \alpha_s) dt + \sigma(t, X_t^\alpha, \alpha_s) dW_t \\ u(t,x) = \sup_{(\alpha_s)_{s \in [t,T]}} \mathbb{E} \left[\varphi(X_T^\alpha) e^{-r(T-t)} + \int_t^T f(s, X_s^\alpha, \alpha_s) e^{-r(T-s)} ds \mid X_t^\alpha = x \right] \end{cases}$$

processus stochastique **contrôlé**

Attention : il faut toutefois utiliser une notion de solution faible adaptée à ce type d'EDP, intermédiaire entre solution classique et solution au sens des distributions : les "solutions de viscosité".

Pierre-Louis Lions, médaille Fields 1994

Démonstration : formule d'Itô , espérances conditionnelles et principe de la programmation dynamique (sous hypothèse de dérivabilité)

L'EDP d'Hamilton-Jacobi-Bellman

est une version stochastique en temps continu du principe de la programmation dynamique

GDF SUEZ

HJB :

$$\begin{cases} u(T,x) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \sup_{\alpha} \left[b(t,x,\alpha) \cdot \nabla u + \frac{1}{2} \text{trace} \{ \sigma \sigma^*(t,x,\alpha) \nabla^2 u \} + f(t,x,\alpha) - ru \right] = 0 \end{cases}$$

Dans l'équation d'HJB, le sup porte sur les valeurs possibles du contrôle à chaque instant - un peu comme si l'on pouvait supposer le contrôle optimal constant sur $[t, t+dt]$. Ceci permet "souvent" une grande simplification, en général on peut exprimer le contrôle optimal en fonction des dérivées de u . Si l'optimisation est explicite alors l'équation se résout aussi vite qu'une équation linéaire.

Dans le problème original, le sup porte sur l'ensemble des stratégies de contrôle possible.

Problème de contrôle optimal stochastique :

$$\begin{cases} dX_t^\alpha = b(t, X_t^\alpha, \alpha_s) dt + \sigma(t, X_t^\alpha, \alpha_s) dW_t \\ u(t,x) = \sup_{(\alpha_s)_{s \in [t,T]}} \mathbb{E} \left[\varphi(X_T^\alpha) e^{-r(T-t)} + \int_t^T f(s, X_s^\alpha, \alpha_s) e^{-r(T-s)} ds \mid X_t^\alpha = x \right] \end{cases}$$