

Back to the
Future / Forth
into the Past

P-L. LIONS

Introduction

Information ou
observation ?

Calculs en
(très) grande
dimension

Nouvelles
applications ? !

Back to the Future / Forth into the Past

Pierre-Louis LIONS

Journées-Ateliers FIME

EDF Lab Paris-Saclay, 22-23 septembre 2021

INTRODUCTION

- nouveau projet développé collectivement. . .
- pas de technique aujourd'hui !
- quelques travaux en cours
- de nouvelles applications ?
- séance "surprise" (plus vraiment, mais. . .)

2 et 3 correspondent à 2 critiques majeures de la modélisation de type MFG : i) c'est difficile. . . ! . . . à calculer, ii) un acteur ne sait pas tout !

INFORMATION OU OBSERVATION ?

- Un agent ne sait pas "tout", ne voit pas "tout"...
- En contrôle stochastique, info partielle : état, observation, contrôle (feedback) sur le processus observé
→ contrôle de l'équation de Zakaï (HJB sur l'espace des mesures, réduction dans le cas gaussien)
- Extension aux MFG (PL^2 , CdF...) : même approche sur l'état de chaque agent mais hypothèse sur l'état de la foule

Pb classique : jeux à info partielle

Hypothèse : tous les agents partagent les mêmes hypothèses/croyances sur l'état des autres agents

→ MASTER EQUATION, réduction dans le cas gaussien

OK MAIS CE N'EST PAS LE PB LE + INTÉRESSANT

En cours (Ch. Bertucci) : chaque agent connaît son propre état mais ne connaît pas la répartition des états des autres joueurs. Il **observe** des quantités agrégées à partir de la distribution des joueurs.

Ex. (déterministe ou avec bruit idiosyncratique)

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + H(x, \nabla u) = f[m]$$

dans le cas "habituel", on aurait

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \Delta m - \operatorname{div}(H'_p(x, \nabla u)m) = 0$$

mais m_0 n'est pas connu, donc m ne l'est pas. En revanche, $f[m]\theta$ est observé (= connu) (ou $f[m] = \Phi[g[m]], g[m]$ observé. . .) i.e. le coût dépend de m par des quantités agrégées.

D'où nouvelle variable $\mu \in \mathcal{P}(m), \mathcal{U}(\mu, x)$, Master Equation avec un terme $\langle \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mu}, \mathcal{A} \rangle$ où l'opérateur $\mathcal{A}$ (multiplicateur de Lagrange) correspond à la contrainte

$$\nabla m \in \text{Supp } \mu : F[m] = \bar{\Phi} \text{ donné.}$$

"Une sorte de projection sur la variété des contraintes"

Ex : approche Hilbertienne de la projection

$$\mu \leftrightarrow X \text{ r.a (a valeurs dans } \mathcal{M})$$

$$F[m] \leftrightarrow \mathcal{F}(X)$$

$$X \mapsto E[X/\mathcal{F}(X) = \bar{\theta}]$$

Il semble que le problème soit bien posé (toujours) sous l'hypothèse de monotonie...

CALCULS EN (TRÈS) GRANDE DIMENSION

- Objectif : calculer HJB et MFG en très grande dimension (Master Equation)
- Nombreux travaux récents surtout sur HJB (voir Pham-Warin...) à l'aide de réseaux de neurones
- Ex. de notre approche (Achdou, L. Bertucci, Lasry et PL²) MFG (étendu) espace d'état fini

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (A(X, U) \cdot \nabla) U = B(X, U)$$

- Pourquoi a-t-on une chance ? "complexité" faible des solutions ! Connaissance de l'allure des solutions d'où une paramétrisation intelligente pour les réseaux de neurones, échantillonnage de l'espace (ne semble pas être déterminant), itération de type point fixe et paramètres optimaux grâce aux réseaux de neurones (loss function sur les équations de point fixe)

- "Justification" avec quelques briques mathématiques

i) $\frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} + (A(X, U^n) \cdot \nabla) U^{n+1} = B(X, U^n)$ convergence très rapide quand $n \rightarrow \infty$ ($\approx$ Newton)

ii) le calcul fournit (en simplifiant la présentation) un ε - point fixe (sous forme intégrale)

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial t} + A(X, V) \cdot \nabla U - B(X, V) \right\| \leq \varepsilon$$

Alors U et V sont proches (fonction de ε) de la solution. . .

NOUVELLES APPLICATIONS ? !

- agriculture / réseaux hétérogènes / décentralisation et noeuds intelligents
- biodiversité / économie, finance : thème relié au précédent. Envisager une stratégie d'alliance avec la Chaire VEOLIA (S. Méléard, CMAP), VEOLIA et le Museum auquel(le)s manque la composante économique et financière accompagnant la recherche d'indicateurs quantitatifs pertinents

("Filiale" commune avec FIME et FDD ?)